نظري

◄ دكتور المادة: ملك ماورديني

◄ المحاضرة الرابعة عشر   عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الجزئية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية الخطية.

٢ـ تصنيف المعادلات السابقة حسب المميز.

٣ ـ حل مسائل الشروط الابتدائية للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام فصل المتغيرات.

٤ـ أمثلة عن ماسبق.

المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية الخطية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$ وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية حيث أن :

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \;\&\&\; t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \;\&\&\; s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \;\&\&\; z=z(x,y)$$

وتكون الخطية منها على الشكل التالي:

$$Ar+Bs+Ct+Hp+Eq+Fz=0\ldots\ldots\ldots(@)$$

حيث أن كل من A,B,C,H,E,F إما ثوابت أو دوال ب x,y شرط أن

$A^2+B^2+C^2\neq 0$ ولتصنيف هذه المعادلات حسب المميز Δ وتقسم إلى الحالات الثلاث:

١) تسمى بالمعادلة الزائدية $\Delta>0$

٢) تسمى بالمعادلة المكافئية $\Delta=0$

٣) تسمى بالمعادلة الناقصية $\Delta<0$

وسنوضح ذلك في المثال التالي:

صنف المعادلات التفاضلية التالية :

$$1)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{dt^2}$$

نلاحظ أن $z = z(x,t)$ وبالتالي فإن:

المشتق الثاني للتابع z بالنسبة للمتغير الأول $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

المشتق الثاني للتابع z بالنسبة للمتغير الثاني $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ ومنه....

أصبحت المعادلة التفاضلية الخطية $r = -\frac{1}{c^2}\ t$ بالمقارنة مع (@) نجد:

أمثال $r = 1\ \&\&\ A = 1\ \&\&\ t = -\frac{1}{c^2}\ \&\&\ c = \frac{1}{c^2}\ \&\&\ B = 0$ ولنحسب المميز نجد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(1)\left(-\frac{1}{c^2}\right) = \frac{4}{c^2} > 0$$ وهي معادلة زائدية :

$$2)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + R\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

لدينا $z = z(x,t)$ تصبح المعادلة الخطية $r - \frac{1}{c^2}t + Rq = 0$ بالمقارنة مع (@) نجد :

$$A = 1\ \ \&\ \ B = 0\ \&\ \ c = -\frac{1}{c^2} \xrightarrow{\text{نحسب المميز } \Delta}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 4 - (1)\left(-\frac{1}{c^2}\right) \rightarrow \Delta > 0$$ فهي زائدية

$$3)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

حسب (@) ومنه المعادلة التفاضلية الخطية :

$$r + t = 0 \ \ \&\& \ \ A = 1 \ \ \&\& \ C = 1 \ \ \&\& \ \ B = 0 \xRightarrow{\text{حسب المميز}} \Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta = 0 - 4(1)(1) = -4 < 0 \rightarrow$ المعادلة ناقصية

تمارين للحل وظيفة:

$$1) \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 6x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$2) \ \sin^2(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{2y\sin(x) \ \partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$3) \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

ملاحظة: سوف نورد الحل في نهاية المحاضرة

حالة خاصة : من المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية ولتكن لدينا المعادلة:

$$Ar + Bs + Ct = 0 : \ \ A, B, C \ \in \mathbb{R} \ (\text{معادلة أولر})$$

إذا كانت هذه المعادلة **زائدية أو ناقصية** وذلك بعد حساب المميز فإن حلها العام يعطى بالشكل التالي:

$$Z(x, y) = F(x + \lambda_1, y) + G(x + \lambda_2, y) : \lambda_1 \& \lambda_2 \ \text{جذور المعادلة المميزة}$$

والتي هي $\quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$

أما في حال كانت المعادلة **مكافئية** أي أن المميز يساوي الصفر (يوجد جذر مضاعف $\lambda = \lambda_2 = \lambda_1$)

فالحل هو :

$$Z(x, y) = F(x + \lambda, y) + yG(x + \lambda, y)$$

حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام فصل المتغيرات :

ليكن لدينا المعادلة $z = z(x,y)$ معادلة تفاضلية جزئية بمتغيرين (x,y) سنأخذ التابع Z عبارة عن جداء التابعين Y,X بحيث: X تابع ل x فقط لا يحوي y **و** Y تابع ل y فقط لا يحوي x

يمكن حل هذا النوع من المسائل وذلك عن طريق البحث عن الدالة $Z = Z(x,y)$ على شكل جداء دالتين الأولى تتبع ل x والثانية ل y سنبحث عن حل من الشكل:

$$Z = X_{(x)}.Y_{(y)}$$

عندها ستتحول جميع المشتقات الجزئية إلى مشتقات عادية وذلك لأن $Z = X.Y$ لنوجد هذه المشتقات:

$$p = \frac{\partial Z}{\partial x} = X'Y + Y'X \; : \; (\text{مشتق جداء})$$

وكون Y لاتحوي x فإن $Y' = 0$ ومنه $\boldsymbol{p = X'Y}$

وكذلك أيضاً :

$$q = \frac{\partial Z}{\partial y} = Y'X \;\; \&\& \;\; r = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = X''Y \;\&\&\; t = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = Y''X \;\&\; s = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = X'Y'$$

بتعويض هذه المشتقات في المعادلة الجزئية ترد إلى معادلة تفاضلية عادية بالنسبة ل Y,X ومشتقاتها وبفصل المتغيرات تحل حيث سنحصل على معادلة من الشكل:

$$F(X,X',X) = G(Y,Y',Y'') = \begin{cases} \lambda \\ \lambda^2 \\ -\lambda^2 \end{cases}$$

إذا كانت من المرتبة الأولى يكون الثابت λ أما إذا كانت من المرتبة الثانية يكون الثابت λ^2 أو $-\lambda^2$ وذلك حسب الشروط الابتدائية .

مثال: حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية باستخدام فصل المتغيرات :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\frac{\partial z}{\partial y} + z: \quad Z(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$$

الحل:

نكتب التابع $Z = X.Y$ لنوجد المشتقات الجزئية من أجل تعويضها بالمعادلة ومنه :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X'Y \quad \&\& \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Y'X \xrightarrow{\text{نعوض بالمعادلة التفاضلية}}$$

$$X'Y = 2XY' + XY$$

وحسب مادرسنا في مقرر التفاضلية (١) هذه المعادلة قابلة لفصل المتغيرات لذلك نقسم على XY:

$$\underbrace{\frac{X'}{X}}_{1} = \underbrace{2\frac{Y'}{Y} + 1}_{2} = \underbrace{\lambda}_{3}$$

نأخذ النسبة الأولى مع λ فنجد :

$$\frac{X'}{X} = \lambda \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln|x| = \lambda x + C_1' \to x = e^{\lambda x + C_1'} = e^{\lambda x}.e^{C_1'} : e^{C_1'} = C_1$$

$$\to x = C_1 e^{\lambda x}$$

نأخذ النسبة الثانية مع λ فنجد:

$$2\frac{Y'}{Y} + 1 = \lambda \to \frac{Y'}{Y} = \frac{\lambda - 1}{2} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln|y| = \frac{\lambda - 1}{2}y + C_2' \to$$

$$Y = e^{\frac{\lambda-1}{2}y + C_2'} = e^{\frac{\lambda-1}{2}y}.e^{C_2'} : e^{C_2'} = C_2 \to Y = C_2 e^{\frac{\lambda-1}{2}y}$$

نعوض كل من X, Y في Z ومنه :

$$Z = C_3 e^{\lambda x + \frac{\lambda-1}{2}y} : C_3 = C_1.C_2 \to Z = C_3 e^{\left(x+\frac{y}{2}\right)\lambda - \frac{y}{2}}$$

بقي علينا إيجاد C_3 من الشرط الابتدائي وذلك حسب مبدأ تركيب الحدود الذي ينص على أن:

إذا كان لدينا حل ما مكتوب بحد واحد ونريد مطابقته مع حل آخر مكون من مجموع حدين فنقوم بكتابة الحل الأول على شكل مجموع حدين بثوابت ومجاهيل يتم تعينها بالمطابقة على أن لا يتغير في الشكل العام وسنرى كيف يتم ذلك ......

لدينا $Z = C_3 e^{\left(x+\frac{y}{2}\right)\lambda-\frac{y}{2}}$ مكتوب بحد واحد نريد مطابقته مع الشرط الابتدائي المكتوب على شكل مجموع حدين وهذه المطابقة من أجل إيجاد الثابت C_3 && λ لنكتب Z بالشكل :

$$Z = C_3 e^{\left(x+\frac{y}{2}\right)\lambda_1-\frac{y}{2}} + C_4 e^{\left(x+\frac{y}{2}\right)\lambda_2-\frac{y}{2}} \xrightarrow[\quad\quad]{y=0 \text{ نعوض الآن}} Z(x,0) = C_3 e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_2 x}$$

بالمطابقة نجد : $\lambda_2 = -3$ && $C_4 = 2$ && $\lambda_1 = -5$ && $C_3 = 3$ ومنه :

وهو المطلوب : $Z = 3e^{-5\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y}{2}} + 2e^{-3\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y}{2}}$

مثال آخر :

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية باستخدام فصل المتغيرات :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t} : \quad u = u(x,t) : 0 < x < 3 \text{ أي محدودة}$$

$$\&\&\ u(0,t) = u(3,t) = 0 \ \&\&\ u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x$$

الحل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''\mathrm{t} \ \&\& \ \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{t}'\mathrm{X} \xrightarrow{\text{نعوض في المعادلة}} \mathrm{x}'' = \frac{1}{h^2} t' x$$

معادلة تفاضلية عادية قابلة لفصل المتغيرات نقسم على xt :

كونها مرتبة ثانية : $\frac{X"}{X} = \frac{1}{h^2}\frac{t}{t} = -\lambda^2$

نأخذ النسبة الأولى مع $-\lambda^2$ ومنه:

$$\frac{X"}{X} = -\lambda^2 \to X" + \lambda^2 x = 0$$

كما مر معنا في المعادلات التفاضلية (١) فالمعادلة السابقة معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة تقبل حلا من الشكل $x = e^{\mu x}$ ومنه :

$$X" = \mu^2 e^{\mu x} \xRightarrow{\text{نعوض في المعادلة}} \mu^2 e^{\mu x} + \lambda^2 e^{\mu x} = 0 \to e^{\mu x}(\mu^2 + \lambda^2) = 0 : e^{\mu x}$$

$$\neq 0 \to \mu^2 = -\lambda^2 \xRightarrow{\text{وبالتالي}} \mu_1 = i\lambda \ \&\& \ \mu_2 = -i\lambda$$

والحل العام يكون من الشكل :

$$x = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

نأخذ النسبة الثانية :

$$\frac{1}{h^2}\frac{t'}{t} = -\lambda^2 \to \frac{t'}{t} = -\lambda^2 h^2 \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln t = -\lambda^2 h^2 t + C_1'$$

$$\to t = e^{-\lambda^2 h^2 t + C_1'} = e^{-\lambda^2 h^2 t}.e^{C_1'} : \ e^{C_1'} = C_3 \ \Longrightarrow t = C_3 e^{-\lambda^2 h^2 t}$$

كما قلنا بأن التابع $u = xt$ بحيث:

$$u = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) C_3 e^{-\lambda^2 h^2 t} = C_4 \cos \lambda x \, e^{-\lambda^2 h^2 t} + C_5 \sin \lambda x \ e^{-\lambda^2 h^2 t}$$

بحيث : $C_4 = C_1.C_3 \ \&\& \ C_5 = C_2.C_3$

بقي إيجاد C_4, C_5 من الشروط الابتدائية نجد $u(0,t) = 0$ أي نعوض $x = 0$ ومنه:

$$u = C_4 e^{-\lambda^2 h^2 t} + 0 = 0 \to C_4 = 0$$

$$u(3,t)=0 \to x=3 \text{ نعوض } \to u=C_5 \sin 3\lambda \, e^{-\lambda^2 h^2 t} \dots\dots\dots (!!)$$

$C_5 \neq 0$ مستحيل أن تكون معدومة لأنه إذا كانت $C_5=0$ هذا يعني أن $u=0$ وهذا مستحيل وبما أنه استنتجنا أن $C_4=0$ وبالتالي :

$$\sin 3\lambda = 0 \to 3\lambda = n\pi \to \lambda = \frac{n\pi}{3} \xRightarrow{\text{نعوض في}(!!)} u = C_5 \sin \frac{n\pi}{3} x \; e^{-\frac{h^2 n^2 \pi^2 t}{9}}$$

والآن نحسب C_5 من الشرط التالي:

$$u(x,0)=5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x$$

نعوض $t=0$ في التابع u العلاقة الأخيرة ومنه :

$$u = C_5 \sin \frac{n\pi}{3} x \xRightarrow{\text{لنطابقه مع الشرط نستخدم فكرة تركيب الحدود}}$$

$$u = C_5 \sin \frac{n_1\pi}{3} x \, e^{-\frac{h^2 n_1^2 \pi^2 t}{9}} + C_6 \sin \frac{n_2\pi}{3} x \, e^{-\frac{h^2 n_2^2 \pi^2 t}{9}} \xRightarrow{\text{بالمطابقة نجد أن}} \frac{n_1\pi}{3} = 8\pi$$

$$\to n_1 = 12 \;\&\&\; \frac{n_2\pi}{3} = 4\pi \to n_2 = 24 \;\&\& C_5 = 5 \;\;\&\&\; C_6 = -3$$

نعوض :

$$u = 5\sin 4\pi x \;\; e^{-\frac{144 h^2 \pi^2 t}{9}} - 3\sin 8\pi x \;\; e^{-\frac{416 h^2 \pi^2 t}{9}} \text{ :وهو المطلوب}$$

حل تمرين الوظيفة:

$$1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 6x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

تكتب المعادلة الخطية بالشكل : $r + xs - (6x^2)t = 0$ ولنحسب المميز بحيث:

$$A=1 \;\;\&\&\; B=x \;\&\&\; C=-6x^2 \to \Delta = x^2 - 4(1)(-6x^2) = 25x^2 > 0$$

وبالتالي فالمعادلة زائدية....

$$2)\ \sin^2 x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y\sin x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$(\sin^2 x)r + (-2y\sin x)s + y^2 t = 0 : A = 1\ \&\ B = -2y\sin x\ \ \&\ c = y^2$

وبالتالي المعادلة مكافئية : $\Delta = 4y^2\sin^2 x - 4(\sin^2 x)y^2 = 0$

$$3)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$r - 2s + 3t = 0 : A = 1\ \&\&\ B = -2\ \ \&\&\ C = 3$

وبالتالي المعادلة ناقصية : $\Delta = 4 - 4(1)(3) = -8 < 0$

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه

أصدقائي حرصاً على الدقة .. نعتذر أولاً عن ورود بعض الأخطاء في المحاضرات السابقة و سنحاول تلافي هذه الأخطاء من خلال التصويبات التالية :

موقع الخطأ	الخطأ	الصواب
المحاضرة ١-ص٦-السطر ٥	نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من الشكل المعادلة (١) فيها : $p(x) = x \quad , q(x) = -8$	نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من الشكل المعادلة (١) فيها : $p(x) = x \quad , q(x) = +8$
المحاضرة ٣-ص٣-السطر ٥	$c_0 + c_1 x + \frac{c_0 x^2}{2!} + \frac{c_3}{3!} x^3 \dots$	$c_0 + c_1 x + \frac{c_0 x^2}{2!} + \frac{c_0}{3!} x^3 \dots$
المحاضرة ٣-ص٤-السطر ٤	$\underbrace{3 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n}_{\boxed{3}}$	$\underbrace{3 \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n\, x^n}_{\boxed{3}}$
المحاضرة ٣-ص٤-السطر ٦	$3 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$	$3 \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n\, x^n$
المحاضرة ٦-ص٤-السطر ٣	الآن نبدل كل n بـ 2n و ذلك لاستنتاج قيم الثوابت ذات الأدلة الزوجية : $C_{2n} = -\frac{C_{2n-2}}{2n(2n+2v)} = -\frac{C_{2n-2}}{4n(n+v)}$	$C_{2n} = -\frac{C_{2n-2}}{2n(2n-2v)} = -\frac{C_{2n-2}}{4n(n-v)}$
المحاضرة ٧ – خواص تحويلات لابلاس	$L[(e^{at})] = \frac{1}{s-a} : s > 0$	$L[(e^{at})] = \frac{1}{s-a} : s > a$
المحاضرة ٧ – خواص تحويلات لابلاس	$L[f'(t)] = sF(s) - f(a)$	$L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$
المحاضرة ٧ – خواص تحويلات لابلاس	$L[f''(t)] = s^2F(s) - sf(a) - f'(a)$	$L[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
المحاضرة ٨ – ص٣ – السطر ١٤ و أيضاً ص٤ – السطر الأول	التي تحقق الشروط $y'(0) = 2, y(0) = 2$	التي تحقق الشروط $y'(0) = 2, y(0) = 0$
المحاضرة ٨ – ص٣ – السطر الأخير	S^2Y9s0-$Sy(0) - y'(0) + y(s) = \frac{1}{1-s}$	S^2Y(s)-$Sy(0) - y'(0) + y(s) = \frac{1}{1-s}$
المحاضرة ١٠ – رقم ٥	$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$
المحاضرة ١٠ – رقم٦	$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$	$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$