نظري

◄ دكتور المادة: هدى الشماط

◄المحاضرة الرابعة عشر

عنوان المحاضرة: تطبيقات و تمارين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـمبرهنة تساعد على تحديد القيمة القصوى النسبية لدالة في متغيرين

٢ـ مبرهنة تساعد على تحديد القيمة القصوى النسبية لدالة عدة متغيرات

٣ـ تمارين و تطبيقات

مبرهنة القيمة القصوى النسبية للدالة في متغيرين :

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ بحيث:

$(a, b) \epsilon D^{\circ}$ نقطة حرجة و المشتقات الجزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية و لنعرف المحدد :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

نميز حالات :

١. $f_{xx}(a,b) > 0$, $\Delta > 0 \Longrightarrow (a, b)$ صغرى نسبية.

٢. $f_{xx}(a,b) < 0$ ، $\Delta > 0 \Longrightarrow (a, b)$ عظمى نسبية.

٣. $\Delta < 0 \Longrightarrow$ ليست قصوى.

٤. $\Delta = 0$ حالة فشل نلجأ إلى تعريف الجوارات.

التعميم للنص السابق: لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بحيث $c(c_1, \dots, c_n) \epsilon D$ نقطة حرجة و $x = (x_1, x_2, \dots\dots x_n)$ والمشتقات الجزئية من المرتبة m مستمرة

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(c) & f_{x_1x_2}(c) & \dots & f_{x_1x_m}(c) \\ f_{x_2x_1}(c) & f_{x_2x_2}(c) & \dots & f_{x_2x_m}(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_mx_1}(c) & \dots & \dots & f_{x_mx_m}(c) \end{vmatrix}$$

نميز أن:

١. $\Delta_1 = f_{x_1x_1}(c) > 0 \;\&\; \Delta_2, \dots, \Delta_m > 0 \Leftarrow$ c صغرى نسبية.

٢. $\Delta_1 = f_{x_1x_1}(c) < 0$ بحيث $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0 \Leftarrow$ c عظمى نسبية.

مثال:

لتكن
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
بحيث :
$$f(x,y) = x^4 + y^4$$
أوجد النقاط الحرجة وادرس فيما إذا كانت القيمة القصوى نسبة ؟

الحل :

$$f_x(x,y) = 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

إذاً (0,0)نقطة حرجة

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{xx}(0,0) = 0$$
$$f_{yy}(x,y) = 12y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{yy}(0,0) = 0$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

فشل المحدد فنلجأ إلى التعريف :

إن $f(x,y) = x^4 + y^4 > f(0,0) = 0$ وذلك $\forall (x,y) \epsilon \mathbb{R}^2$

(0,0) صغرى نسبية بل أكثر من ذلك .. هي صغرى مطلقة .

مثال :

لتكن
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
بحيث :
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$
أوجد النقاط الحرجة وادرس فيما إذا كانت قيمة قصوى نسبية .

الحل :

$$f_x(x,y) = 4x^3 - \frac{1}{2}(x-y) = 0 \qquad \dots(1)$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 + \frac{1}{2}(x-y) = 0 \qquad \dots(2)$$

بجمع المعادلتين :

$$\Rightarrow 4x^3 + 4y^3 = 0$$
$$\Rightarrow x = -y$$

نعوض ب (1) نجد أن :

$$\Longrightarrow 4x^3 - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(4x^2 - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \qquad x = \pm\tfrac{1}{2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y = 0 \qquad\qquad y = \mp\tfrac{1}{2}$$

ومنه نجد أن هي نقاط حرجة $(0,0) \quad \left(\mp\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\right)$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - \frac{1}{2}\,, \qquad f_{yy}(x,y) = 12y^2 - \frac{1}{2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2} = f_{yx}(x,y) \Longrightarrow$$

$$f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} > 0$$

$$f_{yy}\left(\mp\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{5}{2} \qquad , \qquad f_{xy}\left(\mp\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6 > 0$$

ومنه نجد أن $\left(\mp\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\right)$ صغرى نسبية لأن $\Delta > 0$ وإن $f_{xx} > 0$

من أجل $(0,0)$ نجد أن

$$f_{xx}(0,0) = -\tfrac{1}{2} \quad , f_{yy}(0,0) = -\tfrac{1}{2} \; f_{xy}(0,0) = \tfrac{1}{2} = f_{yx}(0,0)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

فشلت المبرهنة و بالتالي نلجأ للجوارات ، لنأخذ الجوار $N\big((0,0),\delta\big)$ ولنأخذ النقطة $\left(\tfrac{\delta}{2}, \tfrac{\delta}{2}\right) \in N\big((0,0),\delta\big)$ و ذلك بسبب ما يلي :

$$\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4} = \frac{2\delta^2}{4} = \frac{\delta^2}{2} < \delta^2 \qquad \text{(حسب تعريف دالة النظيم)}$$

$$f\left(\tfrac{\delta}{2}, \tfrac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta^4}{16} + \frac{\delta^4}{16} > 0 = f(0,0)$$

أيضاً لو أخذنا $\left(\tfrac{\delta}{2}, 0\right) \in N\big((0,0),\delta\big)$ لأنه حسب تعريف النظيم :

$$\frac{\delta^2}{4} < \delta^2$$

$$f\left(\frac{\delta}{2},0\right)=\frac{\delta^4}{16}-\frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2=\frac{\delta^4}{16}-\frac{\delta^2}{16}=\frac{\delta^2}{16}(\delta^2-1)<0=f(0,0)$$

سنرى أنه يمكن أن يكون سالب إذا كان (δ^2-1) سالب

أي بشرط أن $\delta^2-1<0$

$$\Rightarrow \delta^2<1 \quad \Rightarrow \quad (\delta^2<1)$$

إذاً ضمن الشرط $\delta<1$ يكون $f\left(\frac{\delta}{2},0\right)<f(0,0)$

$(0,0)$ ليست قصوى نسبياً.

مثال :

لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

بحيث $f(x,y)=y^2+x^2y+x^4$

أثبت أن $(0,0)$ نقطة حرجة و هل هي قصوى نسبية؟.

الحل :

$$f_x(x,y)=2xy+4x^3\Rightarrow f_x(0,0)=0$$
$$f_y(x,y)=2y+x^2\Rightarrow f_y(0,0)=0$$

$\Leftarrow$ $(0,0)$ حرجة .

$$f_{xx}(x,y)=2y+12x^2\Rightarrow f_{xx}(0,0)=0$$
$$f_{yy}(x,y)=2\Rightarrow f_{yy}(0,0)=2$$
$$f_{xy}(x,y)=2x\Rightarrow f_{xy}(0,0)=0$$
$$\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}0&0\\0&2\end{vmatrix}=0$$

لكن الدالة يمكن اعتبارها حدودية من الدرجة الثانية بالنسبة لـ y و لنحسب المميز لهذه الحدودية:

$$\Delta=x^4-4x^4=-3x^4<0$$

إشارة الدالة من إشارة أمثال y^2 أي أنها موجبة دوماً أي :

$$f(x,y)\geq 0=f(0,0)$$

$(0,0)$ قيمة صغرى مطلقة

مثال:

لتكن $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$$

أوجد النقاط الحرجة للدالة f وبيّن فيما إذا كانت هذه النقاط هي نقاط قيم قصوى نسبية.

الحل:

$$f_x(x,y,z)=2x-y+1=0\ldots(1)$$
$$f_y(x,y,z)=2y-x=0\Rightarrow x=2y\ldots(2)$$
$$f_z(x,y,z)=2z-2=0\Rightarrow z=1\ldots(3)$$

بالتالي (و بالحل المشترك) النقطة الحرجة الوحيدة هي: $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$

لنوجد المشتقات الجزئية :

$$f_{xx}(x,y,z)=2 \quad >0 \ ,f_{xy}(x,y,z)=-1$$
$$f_{yy}(x,y,z)=2 \ \ ,f_{yx}(x,y,z)=-1$$
$$f_{zz}(x,y,z)=2 \ \ ,f_{zx}(x,y,z)=0=f_{xz}(x,y,z)$$
$$f_{yz}(x,y,z)=0=f_{zy}(x,y,z)$$
$$\Delta_1=f_{xx}=2>0 \quad , \quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3>0$$
$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6>0$$

$\Leftarrow \left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ صغرى نسبية

مثال : (هام)

لتكن
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$$

١) أثبت أن (٠,٠) نقطة حرجة لـ f.

٢) برهن أن (٠,٠) هي نقطة قيمة قصوى نسبية لمقصور f على أي مستقيم مار من (٠,٠).

٣) أثبت أنه أياً كان الجوار $N\big((0,0),\delta\big)$ للنقطة (٠,٠) فهنالك نقاط يكون فيها $f(x,y)>0$ ونقاط يكون فيها $f(x,y)<0$

الحل:

◄ **الطلب الأول:**

$$f_x(x,y)=-2x(y-2x^2)-4x(y-2x^2)$$
$$=-2xy+4x^3-4xy+4x^3$$
$$=8x^3-6xy$$
$$f_x(0,0)=0$$
$$f_y(x,y)=(y-x^2)+(y-2x^2)$$
$$=2y-3x^2$$
$$f_y(0,0)=0$$

ومنه $(0,0)$ نقطة حرجة لـ f.

◄ **الطلب الثاني :**

لنفرض أن $y=\alpha x$ (مستقيماً ماراً من المبدأ)

$$f(x,\alpha x)=(\alpha x-x^2)(\alpha x-2x^2)=\alpha^2x^2-2\alpha x^3-\alpha x^3+2x^4$$
$$=\alpha^2x^2-3\alpha x^3+2x^4$$
$$f_x(x,\alpha x)=2\alpha^2x-9\alpha x^2+8x^3$$
$$f_{xx}(x,\alpha x)=2\alpha^2-18\alpha x+24x^2$$

$$f_{xx}(0,0) = 2\alpha^2 > 0$$

ومنه $(0,0)$ هي صغرى نسبية بالنسبة لمقصور f على أي مستقيم $y = \alpha x$ مار من المبدأ.

◄ الطلب الثالث:

لنأخذ النقطة $\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \in N\big((0,0), \delta\big)$

$$f\left(0, \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta^2}{4} > 0 = f(0,0)$$

لنأخذ نقطة أخرى $\left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}, \frac{\delta^2}{2}\right) \in N\big((0,0), \delta\big)$

$$\frac{\delta^2}{3} + \frac{\delta^4}{4} = \delta^2\left(\frac{1}{3} + \frac{\delta^2}{4}\right) < \delta^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{\delta^2}{4} < 1 \Rightarrow \frac{\delta^2}{4} < 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \delta^2 < \frac{8}{3} \Rightarrow \delta < \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$f\left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}, \frac{\delta^2}{2}\right) = \left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{3}\right)\left(\frac{\delta^2}{2} - 2\frac{\delta^2}{3}\right) = \left(\frac{\delta^2}{6}\right)\left(-\frac{\delta^2}{6}\right) = -\frac{\delta^2}{36} < 0 = f(0,0)$$

ومنه $(0,0)$ ليست قصوى للدالة f.

ملاحظة: لقد اخترنا النقطة $\left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}, \frac{\delta^2}{2}\right) \in N\big((0,0), \delta\big)$ لأننا نبحث عن نقطة في جوار الصفر صورتها أصغر من الصفر حيث لو أخذنا النقطة $\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{\delta^2}{2}\right)$ لكانت صورتها أكبر من الصفر وهذا ليس ما نبحث عنه .

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك:	مجموعة السنة الثانية :	مجموعة السنة الأولى:
IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	Improve Our Mathematics	طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد:منى شغل–سندس العص–نذير تيناوي