Mathematical Modeling

النمذجة الرياضية

المحاضرة: 14 و 15
الدكتورة: ميسم

4 / 23 / 2017 المحاضرة الرابعة عشر

إن بداية هذه المحاضرة كانت عبارة عن مراجعة سريعة للمحاضرة السابقة "النموذج السكوني دون عجز"

وَيأتي السؤال في الامتحان عليه كما يلي:

هام

- من نماذج المخزون، النموذج السكوني دون عجز وَلمادة واحدة، المطلوب:

1. اكتب الفرضيات الأساسية لهذا النموذج.

2. صياغة النموذج الرياضي الذي نحدد من خلاله الحجم المثالي للتخزين.
(وَهنا لا نريد حلاً، فقط النموذج الرياضي هو المطلوب.)

3. أوجد الحجم المثالي للمخزون، بحيث تكون تكلفة التخزين أقل ما يمكن.
(وَهنا يجب إيجاد النموذج الرياضي وَحله.)

النموذج السكوني مع عجز وَلمادة واحدة:

الفرضيات الأساسية لهذا النموذج هي نفس الفرضيات للنموذج السابق مع إضافة فرضية سابعة.

- يُستخدم هذا النموذج (النموذج السكوني مع عجز ولمادة واحدة) لتخزين بعض المواد القابلة للعطب أو الفساد مثل الإسمنت وَ الحليب ... إلخ.

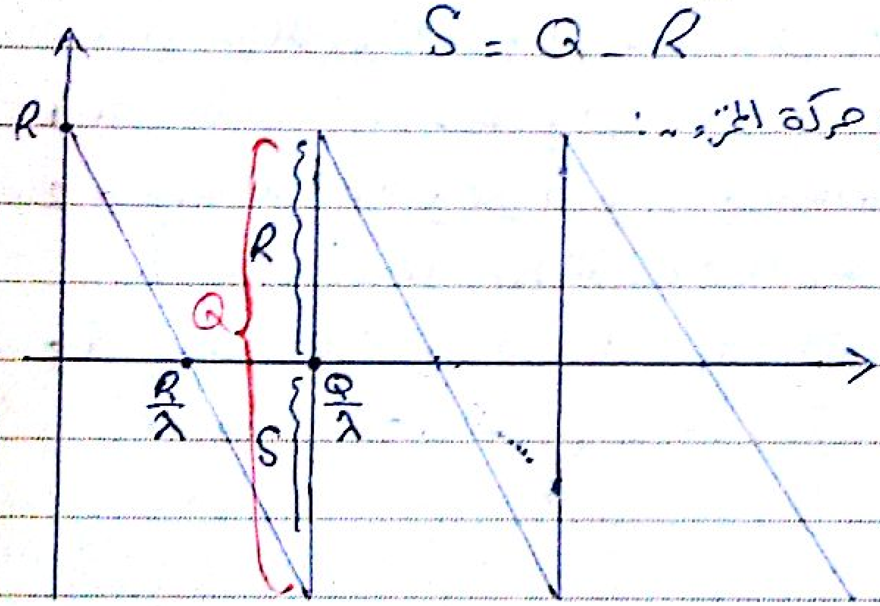
يحدث العجز في المخزون عندما يكون حجم المخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية أقل من حجم الطلب على المادة المخزنة خلال تلك الدورة، لذلك فإنه لمعالجة هذه الحالة نضيف إلى الفرضيات الأساسية السابقة فرضية جديدة هي:

- إن مقدار العجز المسموح به في كل دورة تخزينية يساوي مقداراً ثابتاً S، تكلفة العجز P لكل واحدة من الطلب غير المحقق خلال واحدة الزمن، وَهي تشمل غرامات التأخير وَ فقدان ثقة الزبائن وَغير ذلك..

Alnour

لصياغة النموذج الرياضي، نرمز لحجم المخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية بالرمز R، ولحجم الطلبية التي ترد إلى المستودع في نهاية كل دورة بالرمز Q حيث $R<Q$ ،
عندئذٍ يكون $S = Q - R$

الشكل التالي يوضح حركة المخزون:



بفرض أن λ هي كالسابق تمثل معدل الطلب على المادة في واحدة الزمن فإن حجم المخزون المتوفر r مرتبط بالزمن بواسطة العلاقة التالية

$$r_t = R - \lambda t$$

إن مدة نفاذ المخزون هي $\frac{R}{\lambda}$ ،
ومدة الدورة التخزينية هي $\frac{Q}{\lambda}$ و

$$\frac{Q}{\lambda} > \frac{R}{\lambda}$$

لذلك تجزأ مدة الدورة التخزينية إلى فترتين

الفترة الأولى $\left[0, \frac{R}{\lambda}\right]$ ، الفترة الثانية $\left]\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}\right]$

الفترة الأولى هي فترة العمل والثانية هي فترة العجز.

لحساب تكاليف التخزين في الفترة الأولى يتم حسب النموذج في المحاضرة السابقة.

أما تكاليف التخزين خلال الفترة الثانية فإننا نحتاج إلى حسابات جديدة وبصورة عامة فإنه إجمالي تكاليف التخزين في هذه الحالة يساوي إجمالي التكاليف خلال الدورة الواحدة وتساوي

تكاليف التخزين   تكاليف العجز   تكلفة الطلبية

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

تكاليف الشراء

حيث $C_1 = K$

$C_2 = C(Q)$

أما تكاليف التخزين فتقتصر على الفترة الأولى $\left[0, \frac{R}{\lambda}\right]$ وهي تساوي

$$C_3 = \frac{hR^2}{2\lambda}$$

أما تكاليف العجز التي تستمر خلال الفترة $\left]\frac{R}{\lambda}, \frac{Q}{\lambda}\right]$ تساوي

$$C_4 = (-1)\int_{\frac{R}{\lambda}}^{\frac{Q}{\lambda}} P(R - \lambda t)\,dt = \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

وبالتالي:

مجمل تكاليف $TC(Q) = K + C(Q) + \frac{hR^2}{2\lambda} + \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$

$\Leftarrow$ تكون التكلفة خلال واحدة الزمن هي

$$\frac{TC(Q,R)}{\frac{Q}{\lambda}} =$$

$$C(Q,R) = \frac{\lambda K}{Q} + \lambda C + \frac{hR^2}{2Q} + \frac{P(Q-R)^2}{2Q}$$

وعليه يكون النموذج الرياضي:

أوجد القيمة الصغرى للتابع

$$C(Q,R)=\frac{\lambda K}{Q}+\lambda c+\frac{hR^2}{2Q}+\frac{P(Q-R)^2}{2Q}$$

ضمن الشروط

$$Q>0\ ,\ R>0\ ,\ Q>R$$

ما سبق هو إجابة على السؤال الثاني وهو سؤال امتحاني هام

من خلال نموذج المخزون الساكن مع عجز وسلعة واحدة ، المطلوب:

① كتابة الفرضيات الأساسية لهذا النموذج.

② صياغة النموذج الرياضي الذي نحدد من خلاله الحجم الأمثلي للتخزين.

وإذا طلب ③ أوجد قيم Q و R أو أوجد حجم الطلبية الأمثلي فيكون الحل كما سيأتي:

حصلنا على نموذج رياضي لا خطي بمتحولين Q و R ، لإيجاد الحل الأمثلي لهذا النموذج ، أي القيم المثالية لـ Q و R التي تجعل قيمة هذا التابع أصغر ما يمكن نقوم بإيجاد المشتقات الجزئية للتابع $C(Q,R)$ بالنسبة لـ Q و R ثم نقوم بحل جملة المعادلتين حل مشترك ، نحصل على قيمة لـ Q وقيمة لـ R ، عندها نعوض القيمتين في التابع $C(Q)$ قيمة ونحتاج لتحديد نوعها نلجأ إلى مصفوفة هيسيان للتابع $C(Q)$

① $$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial Q}=\frac{1}{Q^2}\left(-\lambda K-\frac{hR^2}{2}+P(Q-R)Q-\frac{1}{2}P(Q-R)^2\right)$$

② $$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial R}=0+0+\frac{2hR}{2Q}+\frac{2P(Q-R)(-1)}{2Q}$$

تأكد من ذلك ^^ وظيفة !

ثم نقوم بحل المعادلتين السابقتين

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial R} = 0$$

وبالحل نحصل على:

$$* \begin{cases} Q^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda K}{h}\right)\left(\frac{p+h}{p}\right)} \\ R^* = \sqrt{\left(\frac{2K\lambda}{h}\right)\left(\frac{p}{p+h}\right)} \end{cases}$$

ملاحظة: لإيجاد القيمتين في $*$ نأخذ المعادلتين ① و ②

من المعادلة ① نحصل على Q^2

من المعادلة ② نحصل على $2Q$

وذلك بعد جعل الطرف الأيمن من العلاقتين السابقتين مساوي للصفر.

بحل المعادلات الناتجة نحصل على المطلوب.

عند القيمتين الواردتين في $*$ يحقق التابع $C(Q,R)$ قيمة قصوى، ومن أجل تعيين نوع هذه القيمة، نلجأ إلى مصفوفة هيسيان ولكن قبل ذلك يجب أن نتأكد من أن Q^*, R^* تحققان الشروط في النموذج الرياضي

إن Q^*, R^* ترتبطان بالعلاقة التالية

$$Q^* = \frac{p+h}{p} R^*$$

عاماً أن $h > 0$ فإن

$$\frac{p+h}{p} > 1$$

$\Leftarrow$ شرط النموذج محقق $\Leftarrow$ $Q^* \geq R^*$

مصفوفة هيسيان :

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 C(Q,R)}{\partial Q^2} & \dfrac{\partial^2 C(Q,R)}{\partial R \partial Q} \\[2ex] \dfrac{\partial_2 C(Q,R)}{\partial Q \partial R} & \dfrac{\partial^2 C(Q,R)}{\partial R^2} \end{bmatrix}$$

ندرسها حتى تكون معرفة موجبة ⇐ يكون الناتج محدب والقيمة قيمة صغرى.

ارقت

4/23/2017 المحاضرة الخامسة عشر

نموذج التخزين المتعدد والحجم المحدود:

لنفرض أن المستودع يقوم بتخزين وبيع m مادة وإن حجم (أو مساحة) المستودع محدوداً ويساوي B واحدة، إن كل واحدة من المادة i من هذه المواد تشغل مكاناً قدره S_i من حجم المستودع.

نفرض أيضاً أن النموذج يحقق الفرضيات الآتية:

1. معدل الطلب على المادة i = λ_i في واحدة الزمن.
2. الكمية الأولية المتوفرة من المادة i في بداية الزمن = Q_i.
3. كلما وصل مستوى التخزين من المادة i إلى صفر يتم تعويضها بنفس الكمية Q_i.
4. إن سعر شراء الوحدة الواحدة من المادة i = C_i.
5. يوجد تكلفة ثابتة قدرها K_i من أجل إعداد كل طلبية من المادة i.
6. إن تكلفة تخزين المادة i في واحدة الزمن = h_i، وإنه يتم طلب كل من هذه المواد في أوقات مختلفة ومستقلة عن بعضها البعض.

مما تقدم يتبين لنا أن الحجم المحدود للمستودع هو B يتحكم بكمية المخزون من مختلف المواد، وحتى لا يتم تجاوز ذلك الحجم يجب أن تحقق الكميات المطلوبة الشرط التالي:

$$Q_1S_1 + Q_2S_2 + \dots + Q_mS_m \leq B$$

$$C(Q_i) = \frac{K_i\lambda_i}{Q_i} + C_i\lambda_i + \frac{hQ_i}{2} \quad \text{(التكلفة من أجل المادة } i\text{)}$$

عندئذ تكون التكلفة الإجمالية:

Alnour

$$C(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{K_i \lambda_i}{Q_i} + C_i \lambda_i + \frac{h Q_i}{2} \right)$$

وهي التكلفة الإجمالية لتخزين m مادة ،

النموذج الرياضي للمسألة السابقة :

أوجد القيمة الأصغرية للتابع

$$C(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{K_i \lambda_i}{Q_i} + C_i \lambda_i + \frac{h Q_i}{2} \right)$$

مع مراعاة القيد :

$$Q_1 S_1 + Q_2 S_2 + \cdots + Q_m S_m \leq B$$

حيث $Q_i \geq 0$ من أجل $i = \overline{1:m}$

حصلنا على نموذج لا خطي مقيد لإيجاد الحل الأمثل نقوم باستخدام مضاريب لاغرانج ؛ نشكل تابع لاغرانج

$$L(Q_i, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{K_i \lambda_i}{Q_i} + C_i \lambda_i + \frac{h Q_i}{2} \right) + \mu (S_1 Q_1 + \cdots - B)$$

لإيجاد القيمة الصغرى نقوم بإيجاد المشتقات

$$\frac{\partial L(Q_i, \mu)}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda_i K_i}{Q_i^2} + \frac{h_i}{2} + \mu S_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L(Q_i, \mu)}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow S_1 Q_1 + S_2 Q_2 + \cdots + S_m Q_m - B = 0 \quad (2)$$

من (1)

$$\frac{\lambda_i K_i}{Q_i^2} = \frac{h_i + 2\mu S_i}{2}$$

$$Q_i = \sqrt{\frac{2 \lambda_i K_i}{h_i + 2\mu S_i}} \quad ; \quad i = \overline{1:m}$$

/ /

(*) ... $S_1 Q_1 + \dots + S_m Q_m = B$ ②ر

نلاحظ أن الحل $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ الذي وصلنا عليه يجب أن يحقق الشرط (*) للمسألة الموضوع هنا نفترض جدلاً أنه لا يحقق الشرط، أي:

$$S_1\sqrt{\frac{2\lambda_1 K_1}{h_1+2\mu S_1}} + S_2\sqrt{\frac{2\lambda_2 K_2}{h_2+2\mu S_2}} + \dots + S_m\sqrt{\frac{2\lambda_m K_m}{h_m+2\mu S_m}} > B$$

(لم نضع $< B$ لأنه لا يوجد لدينا مشكلة لدينا فيما لو تمت تعبئة المستودع أقل)

ملاحظة أن قيمة الطرف الأيسر تصغر كلما كبرت قيمة μ، أي أننا يمكننا وبشكل تجريبي أن نجد قيمة وحيدة موجبة لـ μ مثل μ^* وذلك بزيادة قيمة μ تدريجياً حتى تتحقق المعادلة

$$S_1\sqrt{\frac{2\lambda_1 K_1}{h_1+2\mu^* S_1}} + S_2\sqrt{\frac{2\lambda_2 K_2}{h_2+2\mu^* S_2}} + \dots + S_m\sqrt{\frac{2\lambda_m K_m}{h_m+2\mu^* S_m}} = B$$

وبذلك نجد أن الحجم الحالي لطلبيات المادة i يعطى بالعلاقة

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2\lambda_i K_i}{h_i+2\mu^* S_i}} \quad ; \quad i = \overline{1:m}$$

و μ^* هي مضروب لاغرانج الذي يحقق هذه العلاقة

$$S_1 Q_1 + \dots + S_m Q_m = B$$

Alnour

هام

السؤال الامتحاني بكون:

من نماذج المخزون نموذج التخزين المتعدد و الحجم المحدود ، المطلوب :

1 اكتب الفرضيات الأساسية . . .

2 أوجد النموذج الرياضي . . .

3 أوجد الحل للنموذج . . .

انتهت

ملاحظة :

تم عرض ثلاثة نماذج للمخزون خلال المحاضرات السابقة

ومن المؤكد ورود سؤال في الامتحان عن أحدهم

بـ (30) علامة تقريباً ^^