علاقة المباشرة

تابع القوى العقدية

$z^a \longrightarrow z$ معرف على $\mathbb{C}^*$ بالعلاقة

$z^a = e^{a \log z}$

حيث a ثابت عقدي

مثال امتحاني: اثبت أن

$z^5 = z \times z \times z \times z \times z$

التكامل العقدي

تكامل تابع عقدي لمتحول حقيقي $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

ليكن $z(t) = x(t) + i y(t)$ تابع عقدي بمتحول حقيقي عندئذٍ إذا كان

$\lim\limits_{t \to t_0} z(t)$ موجود فإن

* $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) \wedge \lim\limits_{t \to t_0} y(t)$ موجودتان

حيث t_0 من المجاورة لجزء التعريف

* وإن $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = Re\, \ell$

$\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = Im\, \ell$

حيث $\lim\limits_{t \to t_0} z(t) = \ell$

* $z(t)$ مستمر عند t_0 $\Longleftrightarrow$ $y(t)$ و $x(t)$ مستمران عند t_0

* تعميم $z(t)$ مستمر على المجال I $\Longleftrightarrow$ $x(t)$, $y(t)$ مستمران على المجال I

* z قابل للاشتقاق عند t_0 $\Longleftrightarrow$ $x(t)$, $y(t)$ قابلان للاشتقاق عند t_0

$z'(t_0) = x'(t_0) + i y'(t_0)$

* z قابل للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ $\Longleftrightarrow$ x,y قابلان للاشتقاق على $]a,b[$

(الاشتقاق عند النقاط الداخلية لذلك نأخذ المجالات المفتوحة لأن جميع نقاطها داخلية)

وإذا كان z قابلاً للاشتقاق على $]a,b[$ فإن $z' = x' + i y'$

* z قابل للاشتقاق على $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ z قابل للاشتقاق على $]a,b[$ وقابل للاشتقاق من اليمين عند a ومن اليسار عند b

* $Z(t)$ تابع أصلي لـ $z(t)$ على I إذا كان $Z'(t) = z(t) \; : \forall t \in I$

* $Z(t) = X(t) + i Y(t)$ تابع أصلي لـ $z(t) = x(t) + i y(t)$ على I $\Longleftrightarrow$ $X(t)$ تابع أصلي لـ $x(t)$ على I و $Y(t)$ تابع أصلي لـ $y(t)$ على I

مثال: $Z(t) = \sin t + i \cos t$ تابع أصلي لـ

$z(t) = \cos t - i \sin t$

$Z'(t) = z(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

Subject:

Date : / /

تعريف: نعرف عن التابع

$$g(t) = x(t) + i\,y(t)$$

أنه عقدي (قابل للمكاملة) على $[a,b]$ إذا كان $x(t)$ و $y(t)$ قابلان للمكاملة على $[a,b]$

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt$$

مثال: احسب التكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+it}\,dt$

إن التكامل من 0 إلى 1 يبين لنا أن t متحول حقيقي

الحل: $\int_0^1 \frac{1}{1+it}\,dt = \int_0^1 \frac{1-it}{1+t^2}\,dt$

(عدد ~~الحقيقي~~ العقدي المضروب بمرافقه يساوي مربع الجزء الحقيقي زائد مربع الجزء التخيلي)

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \frac{i}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$= [\arctan t]_0^1 - \frac{i}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1$$

لا حاجة للقيمة المطلقة لأن $1+t^2$ موجب دائماً

$$= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{i}{2}(\ln 2 - \ln 1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\ln 2$$

خاصة: ليس كل تابع عقدي له تابع أصلي.

سؤال: هل كل تابع معرف ومستمر على مجال يكون تابعه الأصلي معرف ومستمر على نفس المجال؟ ليس بالضرورة.

مبرهنة: إذا كان $g(t)$ تابع مستمر على $[a,b]$ فإن لـ $g(t)$ تابع أصلي على $[a,b]$، وإذا كان $Z(t)$ أي تابع أصلي لـ $g(t)$ على $[a,b]$ فإن

$$\int_a^b g(t)\,dt = Z(b) - Z(a)$$

بشرط أن يكون $g(t)$ مستمر على $[a,b]$

* إن التابع المكامل $\frac{1}{1+it}$ مستمر على $\mathbb{R}$ وبالتالي مستمر على $[0,1]$ وهو مجال المكاملة

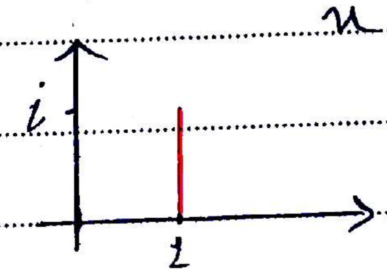
بالنتيجة: لـ $\frac{1}{1+it}$ تابع أصلي على $[0,1]$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+it}\,dt = \frac{1}{i}\int_0^1 \frac{i}{1+it}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{i}\log(it+1)\right]_0^1$$ وهو تابع أصلي

Subject:　　　　　　　　　　Date : / /

* إذا أخذ فرع تحليلي $\log(1+it)$
أي فرع قابل للاشتقاق على $[0,1]$
و للحصول على مثل ذلك الفرع نحتاج
إلى فرع لـ $\log$ تحليلي في نكامله
على المنطقة تحوي صورة المجال $[0,1]$
وفق $(1+it)$ سيكون تابعاً أصلياً
لـ $\frac{1}{1+it}$ على $[0,1]$
ولكن صورة وفق $1+it$ لـ $[0,1]$ واقعة
على مستقيم $x=1$



صورة $[0,1]$ وفق
$1+it$

(لا يمكن التحدث عن قابلية الاشتقاق
لتحول متعدد القيم)
و التركيب لذلك الفرع مع $1+it$
سيكون تابعاً أصلياً
إن $\log$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus O\bar{u}$
و التي تحوي القطعة المستقيمة
$[1, 1+i]$ و منه $\frac{1}{i}\log(1+it)$
هو تابع أصلي لـ $\frac{1}{1+it}$ على $[0,1]$

$$\left(\frac{1}{i}\log(1+it)\right)' = \frac{1}{i}\,\frac{i}{1+it} = \frac{1}{1+it}$$
$\forall t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+it}\,dt = \frac{1}{i}\Big[\log(1+it)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{i}\left(\log(1+i) - \overset{=0}{\log 1}\right)$$
$$= \frac{1}{i}\left(\ln|1+i| + i\frac{\pi}{4} - 0\right)$$
$$= \frac{1}{i}\left(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\pi}{4} - i\ln\sqrt{2}$$

مثال: أحسب $\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt$

الحل:
$$\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt = \frac{1}{i}\Big[e^{it}\Big]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{i}\left[e^{i2\pi} - e^{0}\right] = 0$$

خاصة

$\boxed{1}$ تكامل مجموع يساوي مجموع التكاملين
$\boxed{2}$ $\int \alpha f\,dt = \alpha \int f\,dt$
$\boxed{3}$ $\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt$
$c \in [a,b]$
لكن إذا كانت $c \notin [a,b]$ عندئذ
نشترط وجود التكامل عند المجال
الأوسع

* إذا كانت $g(t)$ تابع قابل للمكاملة
على $[a,b]$ فإن $|g(t)|$ قابل للمكاملة
على $[a,b]$ وإن
$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \le \int_a^b |g(t)|\,dt$$
و الناتج حقيقي موجب

انتهت المحاضرة العاشرة

AL MARJI

29