مقدمة: تحدثنا في المحاضرة السابقة عن طريقة ريتز لحل مسائل القيم الحدية والتي لها ثلاث أشكال، حيث تعرفنا على الشكل الأول والثاني ففي الشكل الأول كان الشكل العام لمسألة القيم الحدية حالة خاصة من الشكل العام لطريقة غالركين كما أن الحل يكون باستخدام غالركين، بينما الشكل الثاني لطريقة ريتز يعتمد على مفهوم المؤثر التفاضلي، بحيث نكتب المعادلة التفاضلية كمؤثر خطي تفاضلي $L[f]$ أما في محاضرة اليوم سنتكلم عن الشكل الثالث وطريقة حل مسائل القيم الحدية بشروط غير صفرية.

الشكل الثالث لطريقة ريتز:

يعتمد الشكل الثالث على مفهوم التغير، حيث نسعى إلى أن يكون تغير الحل يساوي الصفر ونرمز للتغير هنا بـ δ ومنه تغير الحل هو $\delta[u(x)]$

- توضيح مفهوم التغير:

التغير في رياضيات لمتغير ما هو مشتق هذا المتغير بتغير المتحول الذي اشتققناه بالعلاقات الرياضية.

بفرض لدينا: $y = x^2 + \sin(x)$ عندئذ:

$$\delta(y) = \delta(x^2 + \sin(x)) = \delta(x^2) + \delta(\sin(x))$$

$$= 2x \cdot \delta(x) + \cos(x)\,\delta(x)$$

$$\Rightarrow \delta(y) = (2x + \cos x)\,\delta(x)$$

ولدينا من خواص التغير أن مشتق التغير هو تغير المشتق أي:

$$\boxed{\frac{d\delta(u(x))}{dx} = \delta\,\frac{du(x)}{dx}}$$

وسيتم شرح الطريقة للشكل الثالث من خلال المثال التالي:

مثال: باستخدام طريقة ريتز جد الحل التقريبي للمسألة التالية.

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} \leftarrow u''(x) - u(x) + x^2 = 0$$

$$u'(1) = 1 \quad , \quad u(0) = 0$$

الحل:

1. نضرب كل من الطرفين في المعادلة التفاضلية بـ $\delta[u(x)]$ ونكامل على المجال $[0,1]$

$$\int_0^1 \left[-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2\right] \cdot \delta[u(x)] \cdot dx = 0$$

$$\underline{\int_0^1 -\frac{d^2u}{dx^2} \cdot \delta[u(x)]\, dx} + \int_0^1 -u\,\delta[u(x)]\, dx + \int_0^1 x^2 \delta[u(x)]\, dx = 0$$

2. نكامل الحد الأول بالتجزئة لتخفيض مرتبة المشتقة.

مع العلم أن:

$$\int_0^1 u \cdot dv = v \cdot u\Big]_0^1 - \int_0^1 v \cdot du$$

نختار:

$$dv = -\frac{d^2u}{dx^2} \Rightarrow v = -\frac{du}{dx}$$

$$u = \delta[u(x)] \Rightarrow du = \frac{d\delta[u(x)]}{dx}$$

بالتعويض:

$$-\frac{du}{dx}\delta[u(x)]\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{d\delta[u(x)]}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \int_0^1 -u\,\delta[u(x)]\,dx$$

$$+\int_0^1 x^2 \delta[u(x)]\, dx = 0$$

$$(*) \quad -\frac{du}{dx}\delta[u(x)]\Big|_{x=1} + \frac{du}{dx}\delta[u(x)]\Big|_{x=0} + \int_0^1 \Big[\frac{d\,\delta u(x)}{dx} \cdot \frac{du}{dx} - u\,\delta u(x)$$

$$+ x^2 \cdot \delta[u(x)]\Big] dx = 0$$

3. نجري بعض العمليات الرياضية لجعل التغير خارج التكامل وباستخدام مطابقات التغير.

لدينا مشتق تغير يساوي تغير المشتق ومنه:

$$\frac{d\delta[u(x)]}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} = \delta\frac{du(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} = \frac{1}{2}\delta\left[\frac{du(x)}{dx}\right]^2$$

كما أن:

$$u\,\delta u(x) = \frac{1}{2}\,\delta[u^2(x)]$$

وذلك صحيح لأن:

$$\delta[u^2(x)] = 2u\,\delta u(x)$$

وضربنا ب $\frac{1}{2}$ فأصبح لدينا $u\,\delta u(x)$

وأيضاً لدينا:

$$x^2\,\delta u(x) = \delta[x^2 . u(x)]$$

وذلك صحيح لأن:

$$\delta[x^2 . u(x)] = 2x . u\,\delta u(x) + x^2(1)\,\delta u(x)$$

أي مشتق الأول بتغيره مضروب بالحد الثاني + مشتق الثاني بتغيره مضروب بالحد الأول

$$\Rightarrow x^2 . \delta u(x) = \delta[x^2 . u(x)]$$

بالتعويض في العلاقة (*)

$$-\delta u \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} + \delta u \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} + \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\delta[u^2(x)] + \delta[x^2 u(x)]\right] dx = 0$$

بإخراج δ خارج التكامل:

$$-\delta u \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} + \delta u \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} + \delta\int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}u^2(x) + x^2 u(x)\right] dx = 0$$

ومن الشرط الحدي $u' = 1 \Leftarrow \frac{du(1)}{dx} = 1$

$$\Rightarrow -\delta u \left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=1} = -\delta u(1)$$

ونلاحظ بأننا نعلم الشرط الثاني $u(0) = 0$ ولا نعلم أي شيء عن مشتقه

وعليه فالمقدار $\delta u \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}$ لا يمكن تبسيطه إلى صيغة $\delta[\dots]$ لذلك

سنفترض وجود شرط حدي آخر من الشكل $\delta u(0) = 0$ والتي تنفي الحد الثاني

وعليه نجد:

$$\delta\left\{-u(1) + \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}[u^2(x)] + x^2 u(x)\right] dx\right\} = 0$$

ويكون الدالي المكافئ للمسألة:

$$(**) \quad I[u] = u(1) + \int_0^1 \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}[u^2(x)] + x^2 u(x) \right] dx$$

Note: الحلول المقبولة لهذا الدالي هي التي تحقق الشرط الحدي $u(0)=0$
وهي ضمنياً تحقق الشرطان $u'(1)=1$ و $\delta u(0)=0$

مناقشة شكل الحل:

سنناقش الآن الحل بطريقتين بالبيت ولكن في الامتحان يحدد شكل الحدودية التي نريد الحل فيها.

- **الحدوديات التربيعية:**

شكل الحل سيكون كحدودية تربيعية أي:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

ولكن لدينا $u(0)=0$

$$u(0) = (0) \Rightarrow a_0 = 0$$

أي أن الحل المقبول هو:

$$u(x) = a_1 x + a_2 x^2$$

ومن الواضح أن هذا الحل يحقق الشرط $\delta u(0)=0$ لأن:

$$\delta u(x) = \delta(a_1 x + a_2 x^2) = x\delta a_1 + x^2 \delta a_2$$

بتعويض الـ $x=0$ نلاحظ أن $\delta u(0)=0$

بتعويض الحل المقبول في $**$:

$$I[a_1,a_2] = [a_1(1) + a_2(1)^2] + \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 x)^2 - \frac{1}{2}(a_1 x + a_2 x^2)^2 + x^2(a_1 x + a_2 x^2) \right\} dx$$

يعطي الشرط الأصغري

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow -1 + \int_0^1 \left\{ a_1 + 2a_2 x - x(a_1 x + a_2 x^2) + x^3 \right\} dx = 0$$

$$\Rightarrow -1 + \left[a_1 x + a_2 x^2 - \frac{a_1}{3} x^3 - \frac{a_2}{4} x^4 + \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + a_1 + a_2 - \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{4} a_2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} + \frac{2}{3}a_1 + \frac{3a_2}{4} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow -1 + \int_0^1 \left\{2x(a_1 + 2a_2 x) - x^2(a_1 x + a_2 x^2) + x^4\right\} dx = 0$$

$$\Rightarrow -1 + \left[a_1 + \frac{4}{3}a_2 x^3 - \frac{a_1}{4}x^4 - \frac{a_2}{5}x^5 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} + \frac{3}{4}a_1 + \frac{17}{15}a_2 = 0$$

بحل المعادلتين معاً نحصل على:

$$a_2 = -\frac{21}{139} \quad , \quad a_1 = \frac{180}{139}$$

ويكون الحل التقريبي هو:

$$\boxed{u(x) = \frac{180}{139}x - \frac{21}{139}x^2}$$

2- الحدوديات التكعيبية

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

يكون الحل المقبول:

$$u(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

وبتعويض في الدالي نجد:

$$I[u] = -(a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3) + \int_0^1 \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 x + a_3 x^2)^2 dx$$

$$- \int_0^1 \frac{1}{2}(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)^2 dx + \int_0^1 x^2(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

ومن الشرط الأصغري:

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow -1 + \int_0^1 \left\{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 - x(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + x^3\right\} dx = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} + \frac{2}{3}a_1 + \frac{3}{4}a_2 + \frac{4}{5}a_3 = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow -1 + \int_0^1 \left\{2x(a_1 + 2a_2 x + 3a_2 x^2) - x^2(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + x^4\right\} dx = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{5} + \frac{3}{4}a_1 + \frac{17}{15}a_2 + \frac{4}{3}a_3 = 0$$

$$\frac{\delta I}{\delta a_3}=0 \Rightarrow -1+\int_0^1\left\{3x^2(a_1+2a_2x+3a_3x^2)-x^3(a_1x+a_2x^2+a_3x^3)+x^5\right\}dx=0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{5}{6}+\frac{4}{5}a_1+\frac{4}{3}a_2+\frac{58}{35}a_3=0$$

وبحل المعادلات معاً نجد:

$$a_1=1.2831 \quad , \quad a_2=-0.11424 \quad , \quad a_3=-0.02462$$

والحل التقريبي هو:

$$u(x)=1.2831x-0.11424x^2-0.02462x^3$$

مثال(2): أوجد الحل التقريبي للمسألة التالية:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+x^2=0$$

مع الشروط الحدية: $u(0)=1$

$$\frac{du(1)}{dx}+2u(1)=1$$

الحل:

أولاً: نضرب المعادلة التفاضلية بالتغير $\delta u(x)$ ونكامل على المجال $[0,1]$:

$$\int_0^1\left[\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\delta u(x)+x^2\cdot\delta u(x)\right]dx=0$$

نكامل الحد الأول بالتجزئة حيث أن $\frac{d^2u}{dx^2}=dv$ و $u=\delta[u(x)]$

$$u'\cdot\delta u(x)\Big]_0^1+\int_0^1\left\{-\delta u'u'+x^2\,\delta u(x)\right\}dx=0$$

$$u'(1)\cdot\delta u(1)-u'(0)\cdot\delta u(0)+\int_0^1\left\{-\delta u'u'+x^2\cdot\delta u(x)\right\}dx=0$$

من الشرط الحدي الثاني $u'(1)=1-2u(1)$

وباستخدام خواص التغير نحصل على:

$$[1-2u(1)]\,\delta u(1)-u'(0)\,\delta u(0)+\int_0^1\left\{-\frac{1}{2}\delta(u')^2+\delta(x^2u)\right\}dx=0$$

نلاحظ أن:

$$\delta\{u(1)-u^2(1)\}=\delta u(1)-\delta[u^2(1)]=\delta u(1)-2u(1)\delta u(1)$$

$$=\delta u(1)[1-2u(1)]$$

وعليه يكون:

$\delta[u(1) - u^2(1)] - \delta u(0)u'(0) + \delta\int_0^1 \{ -\frac{1}{2} u'^2 + \cdot u \} dx = 0$

$\delta u(0) = 0$ ولكن يجب أن يكون التغير للحل التقريبي يساوي الصفر وعليه

$$\Rightarrow \delta \{ u(1) - u^2(1) + \int_0^1 \{ -\frac{1}{2} u'^2 + x^2 u \} dx = 0$$

وبذلك يكون الدالي المكافئ:

$$* \quad I[u] = \int_0^1 \{ -\frac{1}{2}(u')^2 + x^2 u \} dx + u(1) - u^2(1)$$

مناقشة شكل الحل:

1. الحدوديات التربيعية:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

من الشرط الحدي $u(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

أي أن الحل التقريبي:

$$u(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2$$

لاحظ أن الحل يحقق $\delta u(0) = 0$

$$\delta u(x) = x\delta a_1 + x^2 \delta(a_2)$$

$$\Rightarrow \delta u(0) = 0$$

بتعويض في العلاقة * في الدالي:

$$I[u] = I(a_1, a_2) = \int_0^1 \{ -\frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 x)^2 + x^2(1 + a_1 x + a_2 x^2) \} dx + (1 + a_1 + a_2) - (1 + a_1 + a_2)^2$$

من الشرط الأصغري للدالي:

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \int_0^1 \{ -(a_1 + 2a_2 x) + x^3 \} dx + 1 - 2(1 + a_1 + a_2) = 0$$

$$\Rightarrow 3a_1 \ -\cdot a_2 - \frac{3}{4} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \int_0^1 \{ -2x(a_1 + 2a_2 x) + x^4 \} dx + 1 - 2(1 + a_1 + a_2) = 0$$

$$\Rightarrow 3a_1 - \frac{10}{3} a_2 - \frac{4}{5} = 0$$

بالحل المشترك:

$$a_1 = -0.24286 \quad , \quad a_2 = -0.02143$$

الحدوديات التكميلية :

الحل المقبول :

$$u(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

نعوض الحل في الدالي (*) :

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)^2 + x^2(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \right\} dx + (1 + a_1 + a_2 + a_3) - (1 + a_1 + a_2 + a_3)^2$$

من الشرط الأصغري :

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left\{ -(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) + x^3 \right\} dx + 1 - 2(1 + a_1 + a_2 + a_3) = 0$$

$$\Rightarrow -3a_1 - 3a_2 - 3a_3 - \frac{3}{4} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left\{ -2x(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) + x^4 \right\} dx + 1 - 2(1 + a_1 + a_2 + a_3) = 0$$

$$-3a_1 - \frac{10}{3} a_2 - \frac{7}{2} - \frac{4}{5} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_3} = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left\{ -3x^2(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) + x^5 \right\} dx + 1 - 2(1 + a_1 + a_2 + a_3) = 0$$

$$-3a_1 - \frac{7}{2} a_2 - \frac{19}{5} a_3 - \frac{5}{6} = 0$$

وبحل المعادلات الثلاث معاً :

$$a_1 = 0.18333 \quad , \quad a_2 = -0.1 \quad , \quad a_3 = 0.166667$$

يكون الحل التقريبي :

$$u(x) = 1 + 0.18333x - 0.1x^2 + 0.166667x^3$$

مثال: أوجد القيمة الذاتية λ بطريقة ريتز والتي تمثل حلاً تقريبياً للمسألة التالية:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \lambda u(x) = 0 \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

الحل: نضرب المعادلة التفاضلية بالتغير $\delta u(x)$ والمكاملة على المجال $[0,1]$

$$\int_0^1 (u'' + \lambda u)\, \delta u(x)\, dx = 0$$

Scanned by CamScanner

وبمكاملة أول حد بالتجزئة لتخفيض رتبة الاشتقاق:

$$\delta u(1)u'(1)-\delta u(0)u'(0)+\int_0^1\{-\delta u'u'+\lambda u\delta u\}dx=0$$

يجب أن يحقق الحل الشروط، $\delta u(0)=0$ و $\delta u(1)=0$

وعليه نجد:

$$\int_0^1\{-\frac{1}{2}\delta(u')^2+\frac{1}{2}\lambda\delta u^2\}dx=0$$

$$\delta\int_0^1\{-\frac{1}{2}u'^2+\frac{1}{2}\lambda u^2\}dx=0$$

وعليه الدالي المكافئ:

$$I(u)=\int_0^1\{-\frac{1}{2}u'^2+\frac{1}{2}\lambda u^2\}dx$$

مناقشة شكل الحل:

1- الحدوديات التربيعية:

$$u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

ويحقق الشروط الحدية:

$$u(0)=0\Rightarrow a_0=0$$

$$u(1)=0\Rightarrow a_1+a_2=0\Rightarrow a_1=-a_2$$

وعليه يكون الحل التقريبي:

$$u(x)=a_2(-x+x^2)$$

وبتعويض الحل في الدالي نجد:

$$I[u]=I[a_2]=\int_0^1\{-\frac{1}{2}(-a_2+2xa_2)^2+\frac{1}{2}\lambda(-a_2x+a_2x^2)^2\}dx$$

$$=\int_0^1\{-\frac{1}{2}(4a_2^2x^2-4a_2^2x+a_2^2)+\frac{1}{2}\lambda(a_2^2x^4-2a_2^2x^3+a_2^2x^2)\}dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}a_2^2x^3+a_2^2x^2-\frac{1}{2}a_2^2+\lambda(\frac{1}{10}a_2^2x^5-\frac{1}{4}a_2^2x^4+\frac{1}{6}a_2^2x^3)\right]_0^1$$

بتوحيد المقامات وإخراج a_2^2 عامل مشترك

$$=-\frac{1}{6}a_2^2+\lambda\frac{1}{60}a_2^2=\frac{a_2^2(-10+\lambda)}{60}$$

من الشرط الأصغري:

$$\frac{\partial I}{\partial a_2}=0 \Rightarrow \frac{2a_2(-10+\lambda)}{60}=0 \Rightarrow a_2(-10+\lambda)=0$$

ويكون الحل غير الصفري في هذه المعادلة ممكنا فقط عندما $\lambda=10$ وعليه فإن التقريب للقيمة الذاتية الأولى للمسألة هو 10.

2- الحدوديات التكعيبية:

$$u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

$$u(0)=0 \Rightarrow a_0=0$$

$$u(1)=0 \Rightarrow a_1+a_2+a_3=0$$

$$\Rightarrow a_1=-a_2-a_3$$

ويكون الحل التقريبي المقبول:

$$u(x)=a_2(-x+x^2)+a_3(-x+x^3)$$

وبتعويض الحل في الدالي نجد:

$$I(u)=\int_0^1\left[-\frac{1}{2}\left\{(-a_2+2a_2x)+(-a_3+3a_3x^2)\right\}^2+\frac{1}{2}\lambda\left\{(-a_2x+a_2x^2)+(-a_3x+a_3x^3)\right\}^2\right]dx$$

$$=-\frac{a_2^2}{6}-\frac{a_2a_3}{2}-\frac{2a_3^2}{5}+\lambda\left(\frac{a_2^2}{60}+\frac{a_2a_3}{20}+\frac{4a_3^2}{105}\right)$$

ومن الشرط الأصغري:

$$\frac{\partial I}{\partial a_2}=0 \Rightarrow -\frac{a_2}{3}-\frac{a_3}{2}+\lambda\left(\frac{a_2}{30}+\frac{a_3}{20}\right)=0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_3}=0 \Rightarrow -\frac{a_2}{2}-\frac{4a_3}{5}+\lambda\left(\frac{a_2}{20}+\frac{8a_3}{105}\right)=0$$

يمكن أن نكتب هذه المعادلات على شكل مصفوفة كما يلي:

$$\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}\frac{1}{30} & \frac{1}{20}\\ \frac{1}{20} & \frac{8}{105}\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

حتى يكون لهذه الجملة حلاً غير تافه يجب أن يكون محدد مصفوفة المعاملات صفراً أي:

Scanned by CamScanner

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{30}\lambda & \frac{1}{2}-\frac{1}{20}\lambda \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{20}\lambda & \frac{4}{5}-\frac{8}{105}\lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\lambda\right)^2-\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{30}\lambda\right)\left(\frac{4}{5}-\frac{8}{105}\lambda\right)\right]\right\}=0$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\lambda+\frac{1}{400}\lambda^2-\left[\frac{4}{15}-\frac{8}{315}\lambda-\frac{4}{150}\lambda+\frac{8\lambda^2}{3150}\right]\right\}=0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{60}+\frac{13}{6300}\lambda-\frac{1}{25200}\lambda^2=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{60}-\frac{13}{6300}\lambda+\frac{\lambda^2}{25200}=0$$

يعطي جذرا المعادلة التمييزية تقريبية الأولى قيمتين ذاتيتين للمسألة.

$$\lambda_1=10 \ , \ \lambda_2=42$$

لمعرفة قيمة كل من a_2 و a_3 نفترض $a_2=1$ ونفرض $\lambda=10$ فنحصل على:

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}-10\begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{8}{105} \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{105} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وبالحل نجد أن $a_3=0$ وعليه نحصل على الشعاع الذاتي الأول:

$$u_1(x)=-x+x^2$$

الشعاع الذاتي الثاني نفرض $\lambda=42$

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}-42\begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{8}{105} \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{16}{15} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالحل نجد $a_3 = -\frac{2}{3}$ والشعاع الذاتي يكون:

$$u_2(x) = (-x + x^2) - \frac{2}{3}(-x + x^3)$$
$$= -\frac{x}{3} + x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

طرائق العناصر المنتهية لشروط حدية غير صفرية في بعد واحد:

طريقة ريتز بشروط حدية غير الشروط الصفرية:

عرضنا سابقاً طريقة العناصر المنتهية لمعادلة تفاضلية مع شروط حدية مساوية للصفر، ولكن إذا كانت الشروط الحدية غير ذلك فإننا سنعالج هذه المشكلة بشرح المثال التالي:

مثال: أوجد حل مسألة القيم الحدية:

$$y'' - y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \,,\ y(1) = 1$$

الحل: هنا المشكلة تكمن باختيار توابع الاختبار تحقق شروط الحدية لذلك نختار التوابع φ_i بالشكل:

$$\varphi_i = x^i \quad ; \quad \varphi_0 = 1 \,,\ \varphi_1 = x \,,\ \varphi_2 = x^2 \,,\ \varphi_3 = x^3$$

وعليه نفرض الحل:

$$y_3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

إن y_3 يحقق الشروط الحدية:

$$y_3(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$y_3(1) = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

ويحقق أيضاً المعادلة التفاضلية:

$$y_3'' - y_3 = 0 \Rightarrow$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)'' - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = 0$$

$$2a_2 + 6a_3x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 = 0$$

$$(2a_2 - a_0) + (6a_3 - a_1)x - a_2x^2 - a_3x^3 = 0$$

يوجد أربعة ثوابت مجهولة يتم تعيين اثنين منهم من الشروط الحدية والباقي نختارهم من تحقق العلاقة:

$$\int_0^1 (y_3'' - y_3)\, x^k \, dx = 0$$

لأن توابع الاختبار تحقق شرط التعامد أي تحقق العلاقة السابقة

وعليه لأجل $k = 0, 1$

من الشروط الحدية $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 1 \end{cases}$

$K = 0 \Rightarrow -6a_1 + 20a_2 + 33a_3 = 0$

$K = 1 \Rightarrow -20a_1 + 45a_2 + 108a_3 = 0$

وبحل جملة المعادلات

$a_0 = 0 \;,\; a_1 = 0.851198 \;,\; a_2 = -0.015132 4 \;,\; a_3 = 0.163934$

$x^0 = 1$

$K = 0$

$$\int_0^1 [2a_2 + (6a_3 - a_1)x - a_2x^2 - a_3x^3]\, dx = 0$$

$$2a_2x + \frac{1}{2}(6a_3 - a_1)x^2 - \frac{1}{3}a_2x^3 - \frac{1}{4}a_3x^4 \Big]_0^1 = 0$$

$$2a_2 + \frac{1}{2}(6a_3 - a_1) - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{4}a_3 = 0$$

$$\frac{5}{3}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + \frac{11}{4}a_3 = 0$$

نضرب الطرفين بـ $\boxed{(-12)}$

$$-6a_1 + 20a_2 + 33a_3 = 0$$

$K = 1$

$$\int_0^1 [2a_2x + (6a_3 - a_1)x^2 - a_2x^3 - a_3x^4]\, dx = 0$$

$$a_2x^2 + \frac{1}{3}(6a_3 - a_1)x^3 - \frac{1}{4}a_2x^4 - \frac{1}{5}a_3x^5 \Big]_0^1 = 0$$

$$a_2 + \frac{1}{3}(6a_3 - a_1) - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{5}a_3 = 0$$

$$\frac{3}{4}a_2 - \frac{1}{3}a_1 + \frac{9}{5}a_3 = 0$$

نضرب الطرفين بـ (60)

$$-20a_1 + 45a_2 + 108a_3 = 0$$

مثال: سنفترض المعادلة التفاضلية في المثال السابق والشروط الحدية ذاتها وطريقة الحل ذاتها ولكن سنختار توابع الاختبار بالشكل:

$$\varphi_i = \sin(i\pi x)$$

نفترض الحل التقريبي هو ،

$$y_3(x) = x + a_1\sin(\pi x) + a_2\sin(2\pi x) + a_3\sin(3\pi x)$$

علينا $y_3(x)$ يحقق الشروط الحدية ،

$$y_3(0) = 0 \quad , \quad y_3(1) = 1$$

لذلك وضعنا الحد x أولاً.

الحل التقريبي يحقق المعادلة التفاضلية نعوض فنجد:

$$(y_3'' - y_3) = 0$$

$$\Rightarrow -a_1\pi^2\sin(\pi x) - a_2 4\pi^2\sin(2\pi x) - a_3 9\pi^2\sin(3\pi x) - x - a_1\sin(\pi x) - a_2\sin(2\pi x) - a_3\sin(3\pi x) = 0$$

بالإصلاح :

$$-x-(\pi^2+1)a_1\sin(\pi x)-(4\pi^2+1)a_2\sin(2\pi x)$$
$$-(9\pi^2+1)a_3\sin(3\pi x)=0$$

ونريد إيجاد الثوابت a_1, a_2, a_3 التي تحقق شرط تعامد أي التي تحقق ،

$$\int_0^1 (y_3''-y_3)\sin(n\pi x)\,dx=0$$

حيث $n=1,2,3$

وعليه :

$$n=1 \Rightarrow a_1=\frac{-2}{\pi(\pi^2+1)}=-0.058568$$

$$n=2 \Rightarrow a_2=\frac{1}{\pi(4\pi^2+1)}=+0.007863$$

$$n=3 \Rightarrow a_3=\frac{-2}{3\pi(9\pi^2+1)}=-0.0023624$$

والحل التقريبي هو:

$$y_3(x)=x-0.058567\sin(\pi x)+0.007863\sin(2\pi x)$$
$$-0.0023624\sin(3\pi x)$$

$n=1$

$$\int_0^1\Big[-x\sin(\pi x)-(\pi^2+1)a_1\sin^2(\pi x)-(4\pi^2+1)a_2\sin(2\pi x)\sin(\pi x)-(9\pi^2+1)a_3\sin(3\pi x)\sin(\pi x)\Big]$$

$$\left[-\frac{\sin\pi x}{\pi^2}+\frac{x\cos\pi x}{\pi}-(\pi^2+1)a_1\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x)\right]-(4\pi^2+1)a_2\left[\frac{\sin(\pi x)}{2\pi}-\frac{\sin(3\pi x)}{3\pi}\right]-(9\pi^2+1)a_3\left[\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}-\frac{\sin(4\pi x)}{4\pi}\right]\right]_0^1=0$$

$$\left[-\frac{1}{\pi}-(\pi^2+1)a_1\left[\frac{1}{2}\right]\right]=0$$

$$-\frac{1}{\pi}+\left[-\frac{1}{2}\pi^2-\frac{1}{2}\right]a_1=0$$

$$a_1=\frac{\frac{1}{\pi}}{-\frac{1}{2}\pi^2-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-2}{\pi(\pi^2+1)}$$

بالاستعانة بالتكاملات التالية

$$\int x\sin ax\,dx=\frac{\sin ax}{a}-\frac{x\cos ax}{a}$$

وبنفس الطريقة.

$$\int \sin^2 ax\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin(2ax)$$

$$\int \sin a_1x\,\sin a_2x=\frac{\sin(a_1-a_2)x}{2(a_1-a_2)}-\frac{\sin(a_1+a_2)x}{2(a_1+a_2)}$$

مع العلم $\sin(-\theta)=\sin(\theta)$