سـ 4 ـاعة

التاريخ 2017/4/19 — الموضوع الدرس 4 — تمارين 4

تمرين: لتكن $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف كما يلي

$L(x,y,z) = (2x+y, -x+z, x+3y+z)$

1) أوجد المصفوفة الممثلة للتطبيق L

$E = \{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$

$L(e_1) = (2,-1,1) = 2e_1 - e_2 + e_3$

$L(e_2) = (1,0,3) = 1e_1 + 0e_2 + 3e_3$

$L(e_3) = (0,1,1) = 0e_1 + e_2 + e_3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_A(x) = \det(xI - A)$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ +1 & x & -1 \\ -1 & -3 & x-1 \end{vmatrix}$$

$= (x-2)(x^2-x-3) + (x-2) + 0$

$= (x-2)(x^2-x-3+1)$

$= (x-2)(x-2)(x+1)$

$= (x-2)^2(x+1)$ القيم الذاتية

Scanned by CamScanner

الحدودية الأدنوية تقسم الحدودية

$q_A(x) = (x-2)^{r_1}(x+1)^{r_2}$

$r_1 \in \{1,2\}$ ، $r_2 = 1$

$q_A(x) = (x-2)(x+1)$ نجرب

$q_A(x)$ في $x = A$ نعوض

$$q_A(A) = (A-2I)(A+I)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

غير صحيح

$\Rightarrow$ دائماً صحيحة

$q_A(x) = (x-2)^2(x+1)$ نجرب

$x = A$ نعوض

$$q_A(A) = (A-2I)^2(A+I)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow q_A(x) = P_A(x) = (x-2)^2(x+1)$

Scanned by CamScanner

القيم الذاتية للمؤثر L هي

$\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = -1$

حيث L هو $(\lambda_1=2, \lambda_2=-1)$

المتجهات:

$L(v) = \lambda v$

$L(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$

$\Rightarrow 2x+y = \lambda x \Rightarrow (2-\lambda)x+y=0$

$-x+z = \lambda y \Rightarrow -x-\lambda y+z=0$

$x+3y+z = \lambda z \Rightarrow x+3y+(1-\lambda)z=0$

نعوض $\lambda_1 = 2$ في

$y=0$

$-x-2y+z=0 \Rightarrow -x+z=0 \Rightarrow x=z$

$x+z=0 \Rightarrow x=z$

$v_1 = (x,0,x)$; $x \in R$

نعوض $\lambda_2 = -1$ في

$3x+y=0 \Rightarrow y=-3x$

$-x+y+z=0 \Rightarrow +4x=z$

$x+3y+2z=0 \Rightarrow x-9x+8x=0$

$v_2 = (x,-3x,4x)$ $x \in R$

Scanned by CamScanner

[4] او جد قاعدة ذاتية لـ L

$\lambda_1 = 2 \quad x = 1$

$\Rightarrow V_1 = (1, 0, 1)$

$\lambda_2 = 1 \quad x = 1$

$\Rightarrow V_2 = (1, -3, 4)$

- لا يوجد قاعدة ذاتية لأن أي متجه ذاتي ثالث سيكون مرتبطاً خطياً مع V_1 و V_2.
- B ليست قاعدة ذاتية $\Rightarrow$ ليس قطري $\Rightarrow$ المثلث لأن الحدودية المميزة كانت على شكل جداء أقواس من الدرجة الأولى.
- لتثليث L نضيف متجه ثالث إلى B بحيث تكون المجموعة مستقلة خطياً.

$V_3 = e_1 = (1, 0, 0)$

$B' = \{V_1(1,0,1), V_2(1,-3,4), V_3(1,0,0)\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

نوجد مصفوفة L بالنسبة لـ B'

* $L(V_1) = \lambda V_1 + 0V_2 + 0V_3$ (ذاتي)

$L(V_1) = 2V_1 + 0V_2 + 0V_3$

* $L(V_2) = 0V_1 - 1V_2 + 0V_3$ (ذاتي)

* $L(V_3) = L(1,0,0) = (2,-1,1)$ (ليس ذاتي)

$= \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,-3,4) + \alpha_3(1,0,0)$

Scanned by CamScanner

$$\alpha_1 = -\frac{1}{3} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = 2$$

$$\Rightarrow L(V_3) = -\frac{1}{3}V_1 + \frac{1}{3}V_2 + 2V_3$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مثلثية حلا.

انتهى الحل:

ملاحظات:

① $L: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$

$P_A(x) = (x-3)(x^2+1)$

L لها ثلوث متمايزة

$P_A(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$

② $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P_A(x) = (x-3)(x^2+1)$

L ليس ثلوث

مثال: لتكن $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

1. اوجد الكثيرة الحدودية المميزة والمعادلة المميزة للمصفوفة
2. اوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية والقاعدة للفضاء الذاتي
3. ناقش قطرية A إذا كانت قابلة للقطر أو لا.

وثبت إن A قابلة

الحل:

① الكثيرة الحدودية المميزة

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & -1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-3)[x(x-2)+1] - (-2)[(x-2)+1] - 1[-1+x]$$

$$= (x-3)(x^2-2x+1) + 2(x-1) - (x-1)$$

$$= (x-3)(x-1)^2 + 2(x-1) - (x-1)$$

$$= (x-1)[(x-3)(x-1)+2-1]$$

$$= (x-1)[x^2-4x+4]$$

$$= (x-1)(x-2)^2$$

الكثيرة الأصغرية:

$$q_A(x) = (x-1)^{r_1}(x-2)^{r_2} \quad ; r_1 = 1 \quad , r_2 \in \{1,2\}$$

$$\neq q_A(x) = (x-1)(x-2)$$

$$= (A-I)(A-2I) \neq 0$$

$\Rightarrow$ ضمناً الكثيرة الأصغرية هي $q_A(x) = (x-1)(x-2)^2 = P_A(x)$

Scanned by CamScanner

ج) القيم الذاتية:

$\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

الأشعة الذاتية:

$v \neq 0 \ , v \in R^3$

$v = (x, y, z)$

تحقق $A.v = \lambda v$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x & 2y & z \\ -x & 0y & -z \\ x & y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ -x - \lambda y - z = 0 \\ x + y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

نعوض بـ $\lambda_1 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = -x \\ z = 0 \end{array}$$

$v_1 = (x, -x, 0)$

Scanned by CamScanner

نعوض $\lambda_3 = \lambda_2 = 2$ في

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ -x-2y-z=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-x \\ z=x \end{array}$$

$$v_2 = (x, -x, x)$$

لتوضيح القاعدة:

نعوض $x=1$ في v_1

$$v_1 = (1, -1, 0)$$

نعوض $x=1$ في v_2

$$v_2 = (1, -1, 1)$$

$B = \{v_1, v_2\}$ ليست قاعدة ذاتية

A ليست قطرية

A ثلوثة لان اكبر قيمة المميزة كتبت على شكل جذر اقواس من الدرجة الاولى

قاعدة ربط المثلث

$$L(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

سنكمل حل هذا المثال في محاضرة العمل القادمة

$$= (3x+2y+z, -x-z, x+y+2z)$$

تم انتهت المحاضرة ٢٢ بأمان والحمد لله

محمد انس العتار

سرياقية

Scanned by CamScanner