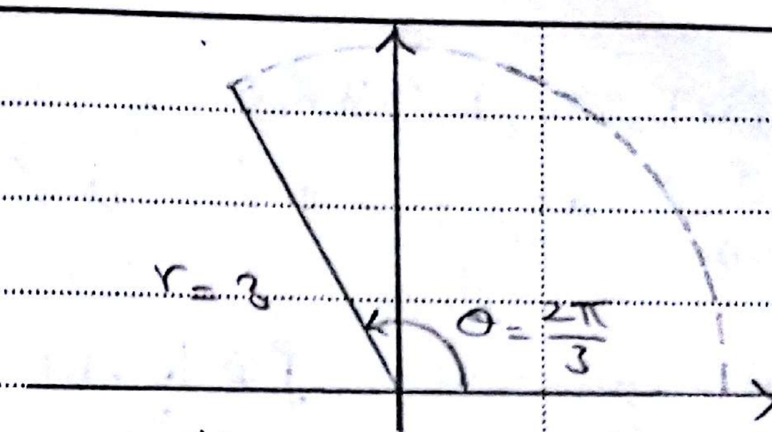


الفرع الرئيسي هو الفرع الموافق لـ $K=0$

$f(z) = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{Arg z}{2}}$

إن Γ هو منحني أملس محتوى في $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ وإن f تابع مستمر على $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ومنه $\int_\Gamma z^{\frac{1}{2}} dz$

$; \gamma(t) = 3e^{it} ; 0 \le t \le \frac{2\pi}{3}$

$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\gamma(t)|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{(Arg\gamma(t))}{2}} (3ie^{it}) dt$

$= 3\sqrt{3} i \int e^{i\frac{t}{2}} . e^{it} dt$

هو التعيين الرئيسي

t لأنها محصورة في المجال

$0 \le t \le \frac{2\pi}{3}$

$= 3\sqrt{3} i \int_0^{\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{3t}{2}} dt$

$= (3\sqrt{3} i)(\frac{2}{3}) [e^{i\frac{3}{2}t}]_0^{\frac{3\pi}{2}}$

$= 2\sqrt{3} i [e^{i\pi} - e^0] = -4\sqrt{3}$

انتهت الخاصة الرابعة عشرة

خاصة خامسة عشرة

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$

$; \gamma(t) = t + iy(t)$

لا يمكن أن يحقق أن يكون أملس قطعياً

$\boxed{5}$ إذا كانت f محدودة على طريق Γ

$|f(z)| \le M \quad \forall z \in \Gamma$

عندئذ فإن $|\int_\Gamma f(z) dz| \le M L(\Gamma)$

تطبيق: عين راجحاً للتكامل (طويلة التكامل)

$\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2+1} dz ; \Gamma = C^+(0,2)$

الحل:

$f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ مستمر على $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$

و $C^+(0,2)$ طريق محتواه في $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ $\Rightarrow$ f محدود على $C^+(0,2)$

$|e^z| = e^x \le e^2$

لأن e^x تابع متزايد

$|z^2 + 1| \ge ||z|^2 - 1|$

$\Rightarrow |z^2+1| \ge |2^2 - 1| = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(z)| = \frac{|e^z|}{|z^2+1|} \le \frac{e^2}{3} = M \Rightarrow$

$\forall z \in C^+(0,2)$

وحسب الخاصة

$$\left|\int \frac{e^3}{z^2+1}\,dz\right| \le \frac{e^2}{3}\,(2\pi(2))$$

$$= \frac{4e^2\pi}{3}$$ وهو الحد لطويلة التكامل

مبرهنة: إذا كان f مستمر على منطقة G (مفتوحة ومترابطة) و Γ طريق في G وكان لـ f تابع أصلي على G وليكن F عندئذ التكامل لـ f

$$\int f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

حيث z_2 نهاية Γ و z_1 بداية Γ

نتيجة: f مستمر على منطقة G وكان لـ f تابع أصلي F على G وكان $z_1, z_2 \in G$ فإن

$$\int f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

حيث Γ في G بدايته z_1 ونهايته z_2

وفي هذه الحالة نستطيع أن نرمز للتكامل بالرمز $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ في G

ونقول أن في هذه الحالة التكامل f مستقل عن الطريق المسلوك في G

مثال: هل التكامل $\int_i^{2+3i} \cos dz$ معين؟

احسب هذا التكامل

الحل: $f(z) = \cos z$

وهو مستمر على $\mathbb{C}$ وله تابع أصلي

$$F(z) = \sin z$$

$\Leftarrow$ التكامل $\int \cos z\,dz$ مستقل عن الطريق المسلوك في $\mathbb{C}$

والتكامل معين

$$\int_i^{2+3i} \cos z\,dz = [\sin z]_i^{2+3i}$$

$$= \sin(2+3i) - \sin i$$

نتيجة 2: إذا كان f تابع مستمر على منطقة G وكان لـ f تابع أصلي على G فإن التكامل لـ f على أي طريق مغلق في G سيكون معدوماً

في حالة المثلث هو طريق مغلق ولكن ليس له تابع أصلي

تمرين: هل التابع $f(z) = \frac{1}{z}$ تابع أصلي على $\mathbb{C}^*$

الجواب: لا لأن التكامل

$$\int_{c^+(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \ne 0$$

مع أن $f(z) = \frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}^*$

في $\mathbb{C}^*$ لا يوجد تابع أصلي لـ $\log z$

لأن في $\mathbb{C}^*$ يمكن الدوران حول 0

Subject: Date: / /

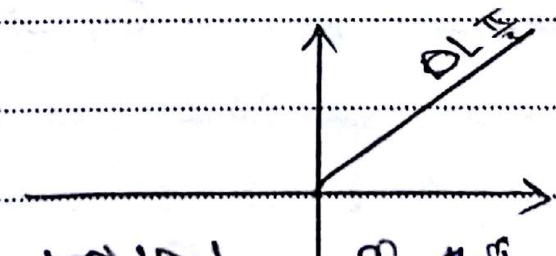
نفس السؤال ولكن بطريقة أخرى

هل التكامل لـ $\frac{1}{z}$ مستقل عن الطريق المسلوك في $\mathbb{C}^*$

الجواب: لا لأن التكامل $\oint \frac{1}{z} dz \neq 0$ على رغم من كون $\frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}^*$ ولو كان له تابع أصلي يجب أن يكون التكامل صفر

سؤال: هل لـ $\frac{1}{z}$ تابع أصلي على $\mathbb{C} \setminus \overline{ox}$

الجواب: نعم لأنه لا يمكن الدوران حول 0، والتكامل هو $\log z$ أحد التوابع الأصلية لـ $\frac{1}{z}$



إن لـ $\frac{1}{z}$ تابع أصلي على $\mathbb{C} \setminus OL_{\frac{\pi}{3}}$

$f(z) = \ln|z| + i\theta$

θ قياس لزاوية z $\theta \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}+2\pi[$

ملاحظة: شرط الاستمرار لتابع على منطقة غير كافي لوجود تابع أصلي على تلك المنطقة

مثل $f(z) = \frac{1}{z}$

مستمر على منطقة $\mathbb{C}^*$ لكن ليس له تابع أصلي على $\mathbb{C}^*$

حتى شرط التحليلية لتابع على منطقة غير كافي لوجود تابع أصلي

مثل $f(z) = \frac{1}{z}$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}^*$

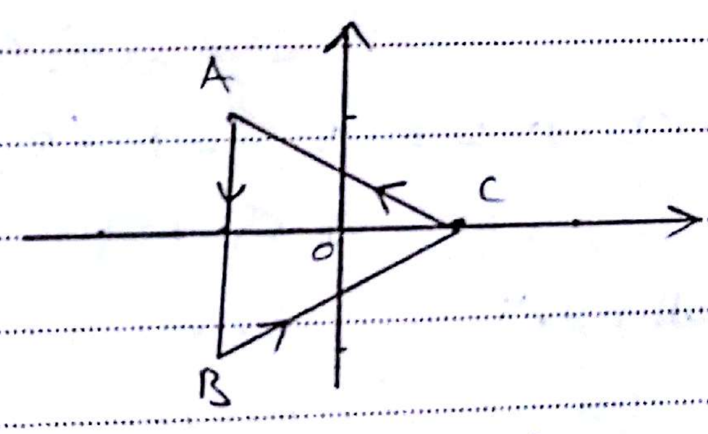
مثال على سؤال امتحاني

ناقش صحة الدعوى: إذا كان f مستمر على منطقة فإن لـ f تابع أصلي

الجواب لا مثال $f(z) = \frac{1}{z}$

تمرين: احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{1}{z} dz$ حيث Γ مثلث الذي رؤوسه

$A = (-1+i)$ و $B = (-1-i)$ و $C = (1)$



$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \int_{AB} \frac{dz}{z} + \int_{BC} \frac{dz}{z} + \int_{CA} \frac{dz}{z}$$

$\frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C} \setminus \overline{ox}$ ولنأخذ التابع الأصلي على $\mathbb{C} \setminus \overline{ox}$

$$\int_{BC+CA} \frac{1}{z} dz = [\operatorname{Log} z]_{-1+i}^{-1+i}$$

Subject: Date: / /

$= Log(-1+i) - Log(-1-i)$

$= \ln|-1+i| + i(\frac{3\pi}{4})$

$-(\ln|-1-i| + i(\frac{\pi}{4} - \pi))$

$= i(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4} i$

$[BC] \oplus [CA] \subseteq \mathbb{C}\setminus Ox^-$

إن $g(z) = \ln|z| + i\theta$

حيث θ قياس لزاوية z الموجبة

لـ $]0, 2\pi[$ هو تابع أصلي لـ $\frac{1}{z}$

على $[AB]$ لأن $\subseteq \mathbb{C}\setminus Ox^+$

و $\mathbb{C}\setminus Ox^+$ منطقة

$\int_{AB} \frac{dz}{z} = g(-1-i) - g(-1+i)$

$= \ln|-1-i| + i(\frac{5\pi}{4})$

$-(\ln|-1+i| + i(\frac{3\pi}{4}))$

$= i(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}) = i\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \int_\Gamma \frac{dz}{z} = \frac{3\pi}{2} i + \frac{\pi}{2} i = 2\pi i$

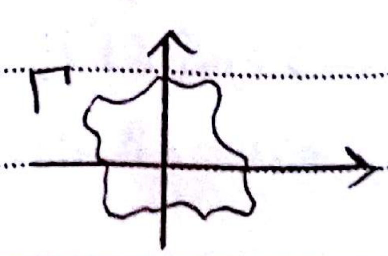
انتهت المحاضرة الخامسة عشرة

المحاضرة السادسة عشرة

من الممكن أن يطلب في الامتحان حساب

تكامل على طريق

هنا يصعب إيجاد شكل



لهذا الطريق لذلك نلجأ إلى تعميم

دالة تابع اللوغاريتم التحليلي هو تابع

أصلي (أحد الفروع)

مبرهنة: (حالة خاصة من صيغة كوشي

التكاملية الأولى (الأعم))

ليكن f تحليلي على منطقة G وليكن

$\bar{D}(a,r) \subseteq G$ إذا كان

$\gamma(s) = a + re^{is} ; 0 \le s \le 2\pi$

تمثيل وسيط له للقرص مرة

واحدة وبالاتجاه الموجب فإن

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

قيم f على القرص — متغير ثابت

$\forall z \in D(a,r)$ مفتوح

ملاحظة: إن معرفة القيم على محيط القرص

لتابع تحليلي وداخله كافٍ لمعرفة قيم هذا

التابع على كامل القرص

أيضاً معرفة لقيمة كثير حدود $n+1$ نقطة

يكفي لمعرفة قيمها على كامل المنطقة

حيث n درجة كثير الحدود

ملاحظة: إذا كان f تحليلي على محيط وداخل

(المنحني)

$\gamma(t) = a + re^{it} ; 0 \le t \le 2\pi$

فإن $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

حيث z_0 أي نقطة داخل γ

المحتوى بالتكامل المحدود لا يؤثر على قيمة التكامل على سير هذا المحتوى بأسره

تمرين: احسب التكامل $\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz$

على γ حيث

$\gamma(t) = i + e^{it} \; ; \; 0 \le t \le 2\pi$ (1)

$\gamma(t) = 2e^{it} \; ; \; 0 \le t \le 2\pi$ (2)

الحل: إن التكامل

(1)

$$g(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}$$

هو تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{+i, -i\}$

شكل التكامل يجب أن يكون

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

$$\oint \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz = \oint \frac{\left(\frac{\sin z}{z+i}\right)}{z - i}\, dz$$

$\frac{\sin z}{z+i}$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ (أي f) تحليلي على محيط وداخل γ)

i تقع داخل γ حسب صيغة كوشي التكاملية الأولى

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz = 2\pi i\, f(i)$$

حيث i تعدم المقام الأصغر

$$= 2\pi i \left(\frac{\sin i}{2i}\right)$$

$$= \pi \sin i$$

$\gamma(t) = 2e^{it} \; ; \; 0 \le t \le 2\pi$ (2)

$$\Rightarrow D(0, 2) \; ; \; 0 \le t \le 2\pi$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

$$= \frac{A}{z-i} - \frac{B}{z+i}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-i}{2} \; , \; B = \frac{i}{2}$$

التابع المكامل يكتب على شكل مجموع لتابعين

$$\frac{\sin z}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{\sin z}{z+i} - \frac{\sin z}{z-i}\right)$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz$$

$$= \frac{i}{2}\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z+i}\, dz - \frac{i}{2}\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z-i}\, dz$$

إن $f_1(z) = f_2(z) = \sin z$ تحليلي على $\mathbb{C}$ في الحالة العامة و $-i$ و i كلاهما داخل γ $\Leftarrow$

$$\frac{i}{2}\left[2\pi i f_1(-i) - 2\pi i f_2(i)\right]$$

$$= -\pi\left[\sin(-i) - \sin(i)\right]$$

$$= -\pi\left[-2\sin(i)\right] = 2\pi \sin(i)$$

هذه المبرهنة تطبق فقط من أجل حدود موجبة واحدة بالاتجاه الموجب

المتتاليات والمتسلسلات التابعية العقدية :

المتتاليات : لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع العقدية المعرفة على مجموعة $A \subseteq G$

- نقول أن $[f_n]$ متقاربة نقطياً أو ببساطة إلى تابع f على مجموعة A ونكتب كرمز: $\lim f_n = f$ (على A) $\Leftarrow \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \; ; \forall z \in A$

يسمى f في هذه الحالة بالنهاية البسيطة لـ $[f_n]$

- نقول أن $[f_n]$ متقاربة بانتظام إلى التابع f على مجموعة A ونكتب للدلالة على ذلك $f_n \xrightarrow{u} f$

$$f = u - \lim f_n$$

إذا وفقط إذا كانت

$$\mu_n = \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0$$

- كل متتالية متقاربة بانتظام على مجموعة تكون متقاربة ببساطة على تلك المجموعة وإنما النهاية المنتظمة لتكن المتتالية هي نفسها النهاية البسيطة

لو طلب منا إثبات التقارب بانتظام لـ f ليس معين هنا أوجد $f_n(z)$ و أوجد النهاية البسيطة ثم أطبق $\sup$ ـ من الضروري بالتقارب بانتظام يكون مع تابع النهاية f لأجل التعريف :

ملاحظة : متتالية من التوابع العقدية المستمرة على مجموعة وكانت هذه المتتالية متقاربة ببساطة نحو تابع f على تلك المجموعة فإن f في الحالة العامة ليس تابع مستمر على تلك المجموعة ـ أما إذا كان التقارب $[f_n]$ نحو f بانتظام على مجموعة A فإن النهاية المستمرة ستكون مستمرة على تلك المجموعة

المتسلسلات : لتكن $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ متسلسلة من التوابع العقدية (متتالية عقدية) المعرفة على مجموعة A ونأخذ المتتالية التابعية $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k \; ; n \geq n_0$ (متتالية مجاميع جزئية للمتسلسلة)

- نقول عن $\sum f_n$ أنها متقاربة ببساطة على A وأن مجموعها هو S ونكتب: $\sum f_n = S$ إذا وفقط إذا كانت المتتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة ببساطة

نحو S على A

. $\sum f_n$ متقاربة بانتظام على A ومجموعها المنتظم هو S ونكتب $\sum f_n \overset{u}{=} S$

نهايتها منتظمة لـ S على A ⟵ $S = u - \lim S_n$

ملاحظة: المجموع المنتظم لمتسلسلة متقاربة بانتظام هو نفسه المجموع البسيط لتلك المتسلسلة أي:

. كل متسلسلة تابعية متقاربة بانتظام إذا كان التقارب بسيطة على مجموعة A نحو تابع ومجموعها المنتظم يساوي S تكون متقاربة ببساطة على تلك المجموعة ومجموعها البسيط هو ذات مجموعها المنتظم

المجموع التوابع (عدد منتهي) ليس بالضرورة أن يكون مستمر عندما لا تكون المتسلسلة متقاربة أما إذا كانت متقاربة فالمجموع تابع

سؤال: هل المجموع لعدد غير منتهي لتوابع المستمرة على مجموعة (سلسلة لا نهائية) في حال وجود التقارب أهل سيكون تابع مستمر على تلك المجموعة S

الجواب ليس بالضرورة

أما إذا كان التقارب بانتظام على تلك المجموعة فإن المجموع منتظم وبالتالي سيكون تابع مستمر على تلك المجموعة

مبرهنة: إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية توابع المقيدة المستمرة على طريق أولاً كانت $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام نحو f على Γ

$f_n \xrightarrow{u} f$

$\int_\Gamma f = \lim \int_\Gamma f_n$

الإثبات: $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على Γ نحو f ← f مستمر على Γ حسب المبرهنة ← f تكامل على Γ

وأيضاً f_n تكامل على Γ وذلك أياً كانت n لنفس السبب

$0 \le |\int_\Gamma f_n - \int_\Gamma f| = |\int_\Gamma (f_n - f)|$

$\le \sup|f_n(z) - f(z)| . L(\Gamma)$

$\forall n ; |f_n(z) - f(z)|$

$\le \sup|f_n(z) - f(z)| < \infty$

$\forall z \in \Gamma$

// المستمر على متراصة محدود ويبلغ القيمة العظمى والصغرى ولديه

Γ, sup أصغر من $f_n(z) - f(z)$ مجموعة متراصة و $\gamma(t)$ هو تابع

Subject: Date: / /

مستمر على المجال المغلق

و $f_n - f$ مستمر على المتراصة Γ

(Γ من المجموعة النقطية لتابع

مستمر على $[a,b]$ جزء متراص

ف f محدود على Γ

لنأخذ نهاية الطرفين (مجموع طويلة

تابع مستمر بين النهاية والطويلة)

$0 \leq |\lim \int_{\Gamma} f_n - f|$

$\leq \mathcal{L}(\Gamma) \cdot \lim \sup_{\zeta \in \Gamma} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|$

$0 \leq |\lim \int f_n - f| \leq 0$ ومنه

لأن $\lim \sup |f_n(\zeta) - f(\zeta)| = 0$

وكون $f_n \xrightarrow{u} f$ على Γ

$|\lim \int f_n - f| = 0$

وهو المطلوب

$\int_{\Gamma} f = \lim f_n$

ملاحظة: إذا كانت $f_n \xrightarrow{u} f$

فإن المتتالية الـ sup تسعى

إلى الـ f محدودة

انتهت المحاضرة السادسة عشرة

AL MARJI