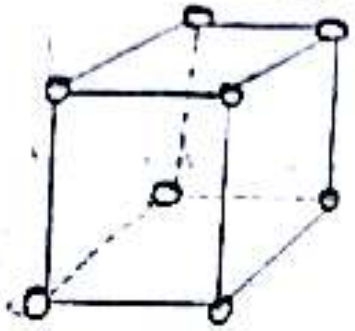
٣.٣ العلاقة بالأشكال الأفلاطونية:

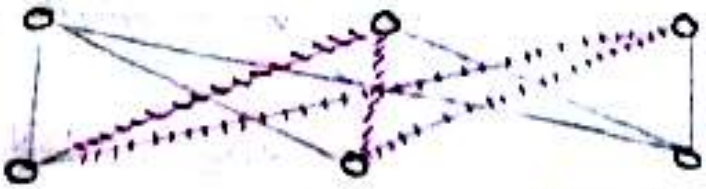
$n - m + f = 2$

n: عدد العقد m: عدد الأضلاع f: الوجوه



$n = 8$, $m = 12$, $f = 6$

$8 - 12 + 6 = 2$



K_{33}

لنبرهن جدلاً أنه مستوي بيان مستوي

$n = 6$

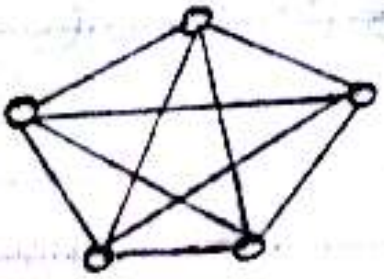
$m = 9$

$6 - 9 + f = 2 \Rightarrow f = 5$

l: عدد الأضلاع المحيطة بالوجوه

$l \times f = 2m \rightarrow 4 \times 5 \stackrel{?}{=} 2m \rightarrow 20 \stackrel{?}{=} 2 \times 9$

$\rightarrow 20 \neq 18$



$n = 5$ $m = 10$

$5 - 10 + f = 2 \rightarrow f = 7$

$l = 3$

$l \times f \stackrel{?}{=} 2m$

نبرهن أن K_5 مستوي:

$7 \times 3 = 21 \stackrel{?}{=} 2m$

$21 \stackrel{?}{=} 2 \times 10 \Rightarrow 21 \neq 20$

ALMATIID.net

Scanned by CamScanner

الدائرة الفردية دائرة عدد أضلاعها فردي
الدائرة الزوجية " " " زوجي
. عقدة فردية : عقدة درجتها عدد فردي
. " زوجية : " درجتها عدد زوجي

مبرهنة: $G=(V,E)$ $V\neq\phi$ $E\neq\phi$

$$\forall v\in V:\ \sum \deg(v) = 2|E|$$

البرهان: بما أن كل ضلع يؤثر في عقدتين وهي مجموع درجات العقد فالأضلاع تكرر مرتين والعلاقة صحيحة

P.S: مهما كان نوع البيان فسط المبرهنة السابقة صحيحة
. بمعنى:
إذا كان لدينا مجموعة من الأعداد الفردية الموجبة فالأعداد عدد زوجي إذا كان عدد عناصر المجموعة زوجي

P.S: يجب أن يكون درجات العقد عدد زوجي وإلا البيان غير قابل للرسم

مبرهنة: إذا كان $G=(V,E)$ بيانياً فإن عدد العقد الفردية في البيان G هو عدد زوجي.

يمكن أن نثبت ذلك إذا كان V مجموعة عقد زوجي.

$V=V'\cup V''$; V': مجموعة العقد الفردية ; V'': مجموعة عقد زوجي

$$\sum_{v\in V'} \deg(v) + \sum_{v''\in V''} \deg(v'') = 2|E|$$

$$\sum_{v'\in V'} \deg(v') = 2|E| - \sum_{v''\in V''} \deg(v'')$$

Scanned by CamScanner

عدد زوجي $= |V^+| \longrightarrow \deg(v)$ عدد زوجي $\sum_{v \in V}$

تمثيل البيان :

يمكن تمثيل البيان في العقد ورؤوس الأضلاع والعقد التي ترتبط بها

ص ليكن لدينا البيان التي قدرة عقدها 3, 5, 7, 2, 4

هل البيان قابل للرسم ؟

لا ، لأن $3+5+7+2+4 = 21$

مجموع قدرات عقد زوجية عدد فردي

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
3	3	2	2	2

Scanned by CamScanner

/ /

المصفوفات في البيان:

يمكن تمثيل البيانات من خلال المصفوفات ويمكن الاستفادة من المصفوفات لحل بعض مسائل نظرية البيان ويوجد تطابق بين فضاء المصفوفات وفضاء البيانات أي كل بيان يقابل مصفوفة.

فيما يلي سنمثل أهم المصفوفات المعروفة مع البيانات:

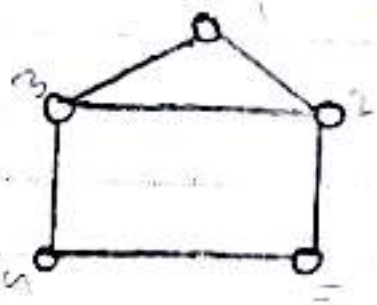
إذا كان البيان موزون نعتمد وزن كل ضلع و إذا لم يكن موزون نعتبر وزن الضلع واحد وبالتالي سنمثل المصفوفات وفق هذا المفهوم.

البيان الموزون: بيانات زودت أحيانا بمقادير عددية موجبة أو سالبة.

ليكن لدينا البيان G نعرف **مصفوفة المجاورة** للعقد ونرمز له بـ A مصفوفة مربعة أعمدتها العقد وأسطرها نفس البيانات إذا كان G بسيط فإن القطر الرئيسي لمصفوفة المجاورة A يساوي الصفر

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } e_{ij} \notin E \\ 1 & \text{if } e_{ij} \in E \end{cases}$$

٤.٣ إذا كان البيان البسيط فإن مصفوفة المجاورة هي مصفوفة مربعة قطرها الرئيسي أصفار



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Scanned by CamScanner

مصفوفة تجاور مصفوفة مربعة أسطرها وأعمدتها أضلاع البيان فإذا كان الأضلاع الضلعين متجاورين e_i تجاور e_j فإن العنصر $m_{ij} = 1$

$M_G =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	1	0	0	1	1
e_2	1	0	1	0	0	1
e_3	0	1	0	1	0	1
e_4	0	0	1	0	1	0
e_5	1	0	0	1	0	1
e_6	1	1	1	0	1	0

مصفوفة الأثير هي مصفوفة أسطرها عقد البيان وأعمدتها أضلاع البيان الناشئ ورمزها B وهي مصفوفة مستطيلة وليست مربعة

$B_G =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	1	1	0	0	1
v_3	1	0	0	0	1	1
v_4	0	0	0	1	1	0
v_5	0	0	1	1	0	0

جمع عناصر أي سطر تعطي قيمة أي عقدة

مصفوفة القطع أسطرها وأعمدتها عقد البيان جميع عناصرها أصفار ماعدا القطر الرئيسي

في مصفوفة الأثير إذا كان جمع أي سطر = 0 فإن العقدة الموافقة لهذه السطر منزلة

Scanned by CamScanner

مصفوفة الدرجات: مصفوفة قطرية تجمع عناصرها أصفاراً ما عدا القطر الرئيسي

$$D_G = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \quad d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{if } i=j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D_G = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

P.S: المصفوفة D في عملياتنا هي $A + D = B * B^T$

أوجد المصفوفات السابقة بالنسبة للبيان الموجه

مصفوفة الإدخال: مصفوفة مربعة $Q(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ وهي ناتج طرح مصفوفة تجاور العقد من مصفوفة القدرة. طابع

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

* قيمة المحدد Q = قيمة المحدد Q' لاتتغير

ALMASTER.net

Scanned by CamScanner

بيان جزئي: ليكن $G(V, E)$, $H=(V', E')$

نقول عن البيان H أنه جزئي من البيان G اذا تحقق:

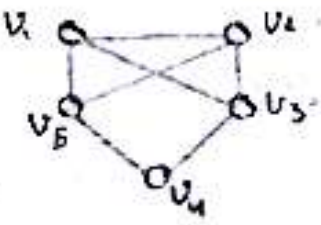
$$E_1 \subseteq E \wedge V_1 \subseteq V$$

P.S اذا كان ما يلي محقق: $V_1 = V$, $E_1 \subseteq E$ يدعى H بيان جزئي موسع أو بيان مشمول في البيان G.

P.S اذا كان البيان H جزئي من G وكانت W هي مجموعة جزئية تماما من V_H أي $W \subseteq V_H$ وكانت أضلاع H تقوي عقد W فنقول عن H بيان مولد بالعقد $H = \langle W \rangle$

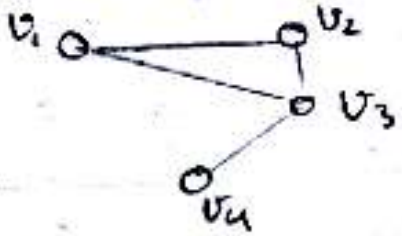
P.S اذا كان H جزئي في G, $H \subseteq G$ وكانت $F \subseteq E$, $F = E_1$ فنسمي H مولد (محدد) بالأضلاع $\langle F \rangle = H$

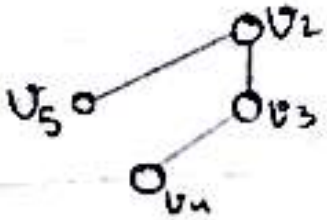
ليكن لدينا البيان التالي:



و ليكن $W = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

البيان المولد بهذه العقد يكون:





$$F = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$$

Scanned by CamScanner

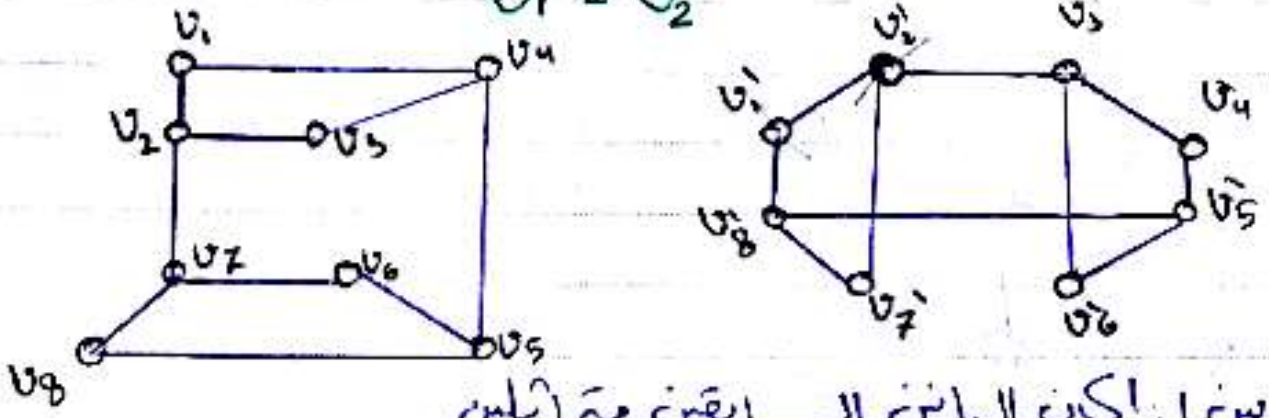
تشاكل البيانات: ليكن لدينا البيانان G_1 و G_2 هما بيانين متشاكلين
إذا وجد تطبيق بين كفتي البيانين وتحافظ على التجاور.

$\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ والتطبيق $G_1 = (V_1, E_1)$ $G_2 = (V_2, E_2)$

$e = (u,v) \in E_1$ و u و $v \in V_1$

$\varphi(u), \varphi(v) \in V_2 : e' = (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$

$G_1 \simeq G_2$



* بين إذا كان البيانين السابقين متماثلين

$\varphi(u_1) = u'_1$ ، $\varphi(u_2) = u'_2$

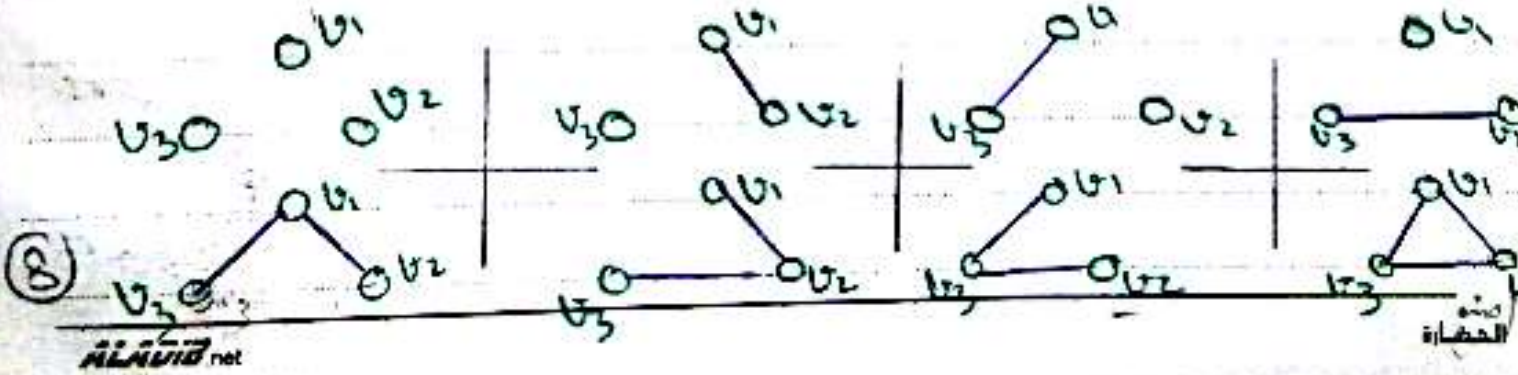
البيانين المتطابقين: هما بيانين يكون فيهما $G_1 = (V_1, E_1)$; $G_2 (V_2, E_2)$

$V_1 = V_2$ و $E_1 = E_2$

ان البيانين السابقين متشاكلين وليسا متطابقين لأن:

$(u'_1, u'_8) \in E_2$ ، $(u_1, u_8) \notin E_1$

ايجاد بيانات غير متطابقة: سنأخذ بيان و نحقق ونوجد جميع الحالات التي يكون البيانات غير متطابقة



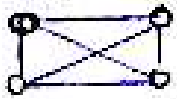
ALUKAH.net
منتدى الحضارة

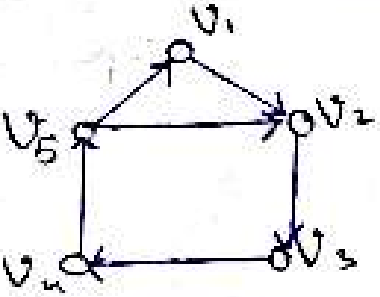
Scanned by CamScanner

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} = 1+3+3+1 = 8$$

تعميم: في حال وجود بيان فيه n عقدة عدد البيانات غير المتطابقة محصورة بين $\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i}$; $m = n(n-1)/2$ ← العلاقة (عدد أضلاع البيان الكامل)

أوجد الكمالات في المتطابقة -



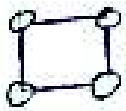


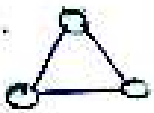
٣. $a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{if } \vec{e}_{ij}(v_i, v_j) \in \vec{E} \\ -1 & \text{else } \vec{e}_{ij} \in \vec{E} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$$A(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

بيانين G_1 و G_2 كيف نوجد اجتماع البيانين

G_1, G_2 " " " الجداء الديكارتي للبيانين





مجموعة تعاريف أساسية:

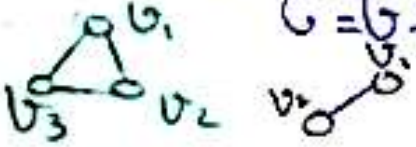
ليكن البيان $G=(V,E)$ بيان بسيط.

نحصل على البيان الجزئي $G'=G-\{v_i\}$ ؛ G' نحصل عليه من البيان G بعد أن حذفنا العقدة v_i وجميع الأضلاع التي تؤثر فيها.

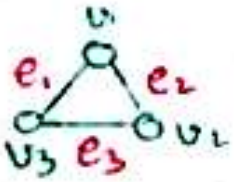
نحصل على البيان الجزئي $G''=G-\{e_k\}$ ؛ G'' نحصل عليه من البيان G بعد أن حذفنا مجموعة العقد الأضلاع المؤثرة فيها.

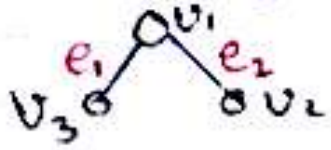
البيان الذي نحصل عليه بعد حذف ضلع: بيان نحصل عليه من البيان الأصلي بعد حذف ضلع.

$G'=G-\{v_2\}$ $G''=G-\{v_1,v_3\}$

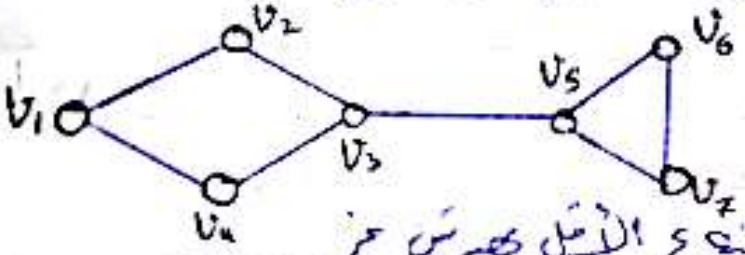


$G'=G-\{e_3\}$





البيان البسيط المترابط: بيان مكون من مركبة واحدة أي أن أي عقدتين بالبيان مرتبطتين بشكل مباشر أو غير مباشر (مرتبطين بضلع)

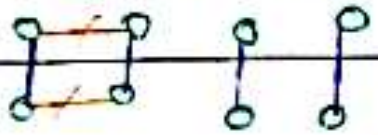


بيان غير المترابط: بيان يوجد به على الأقل عقدتين غير مرتبطين بشكل غير مباشر

الجسر: ضلع إذا حذفناه نحصل على بيان غير مترابط

P.S درجة ترابط بيان كوني جسر = 1

درجة ترابط البيان: أقل عدد ممكن من الأضلاع إذا حذفناها نحصل على بيان مترابط



مبرهنة لتكن $G(V,E)$ بيان بسيط مترابط لتكن T علاقة
T علاقة معرفة على مجموعة العقد
كل عقدتين من V : $\forall v_1, v_2 \in V$ فإن العلاقة T ترتبط
العقدتين إذا وفقط إذا وجد ضلع يربطهما أو متتالية من الأضلاع
تؤثر بسلا

البرهان: كل عقدة مرتبطة بنفسها $\forall v \in V$: $v T v$ فإن العلاقة انعكاسية
$\forall v_i, v_j \in V$; $v_i T v_j \Rightarrow v_j T v_i \quad i \neq j$
$v_i T v_j \Leftarrow$ متعاكسين.

$A. e_{ij} = (v_i, v_j) \Rightarrow (v_j, v_i) = e_{ji}$

$B. v_i$ (e

$\forall v_i, v_j, v_k \in V$; $v_i T v_j \wedge v_j T v_k \overset{?}{\Rightarrow} v_i T v_k$
$v_i T v_j \wedge v_j T v_k \Rightarrow v_i, e_1, v_{i+1}, e_2, \dots, e_n v_j \wedge$
$v_j, e'_1, \dots, e'_n v_k$
$\Rightarrow v_i, e_1, v_{i+1}, e_2, \dots, e_n, v_j, e'_1, \dots, e'_n v_k$
$\Rightarrow v_i T v_k$
من علاقة تكافؤ

كما أنه يمكن تعريف علاقة تكافؤ على البيانات بأنه يمكن توجيه
صفوف تكافؤ) البيانات.

Scanned by CamScanner

تمرين: ليكن لدينا مجموعة الأعداد الصحيحة التالية: $n_1, n_2, \dots, n_k$ $n_i \in \mathbb{Z}^+$ $(i=1,\dots,k)$.
عندئذ تكون العلاقة التالية محققة:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - (k-1)\left(2\sum_{i=1}^{k} n_i - k\right)$$

البرهان: $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n_1-1, \dots, n_k-1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-1) = (n_1-1)+\cdots+(n_k-1) = n_1+n_2+\cdots+n_k-k$$

$$\sum_{i=1}^{n}(n_i-i) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

بالتربيع:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(n_i-1)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k\right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k}(n_i)\right)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\right]^2 = \left[(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)\right]^2$$
$$= (n_1-1)^2+\cdots+(n_k-1)^2+2\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k}(n_i-i)(n_j-j)$$

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)^2+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(n_i-1)(n_j-j) = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 + 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(n_i-1)(n_j-1)$$

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k}(n_i)\right)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

Scanned by CamScanner

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i^2-2n_i+1) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} n_i\right)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2 + 2\sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} n_i\right)^2 - 2(k-1)\sum_{i=1}^{k} n_i + k(k-1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - (k-1)\left(2\sum_{i=1}^{n} n_i - k\right)$$

مبرهنة:

البرهان: سوف نثبت بالاستقراء الرياضي.

$k=1 \Rightarrow |E| \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) = \frac{1}{2}(n-1)n$

$k>1 \Rightarrow$ ① $G_k=(V_k, E_k)$ ، ——— ، $G_1(V, E)$.

① مركبان غير متراكبة.

كل مركبة من هذه المركبات تحقق العلاقة التالية

$$|E_i| \leq \frac{1}{2} n_i(n_i-1) \quad i=1, \dots, k$$

$$\sum_{i=1}^{k} |E_i| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) = \sum_{i=1}^{k}(n_i-k_i) = \sum_{i=1}^{k}(n_i) - \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \leq n^2 - (k-1)(2n-k) - n$$

$$|E| \leq \frac{1}{2}[n^2-(k-1)(2n-k)-n]$$

$$|E| \leq \frac{1}{2}[n^2-2kn+k^2+2n-k-n]$$

$$\leq \frac{1}{2}[n^2-2kn+k^2-k+n]$$

(١٢)

Scanned by CamScanner