البرمجة الاحتمالية: سلاسل ماركوف : نفرض لدينا الحالات : $x_0, x_1, \dots, x_n$

ندعو $S=\{x_1, \dots, x_n\}$ فضاء الحالات.

(لا يهم أين كنا فقط يهمنا التاريخ المرحلة السابقة فقط)

$$p(X_{n+1}=j \mid X_n=i, x_{n-1}=k, \dots, x_0=c)$$

$$= p(X_{n+1}=j \mid X_n=i).$$

لا يهمنا $x_1, x_0, \dots$: $P(X_3=j \mid X_2=i)$

• P_{ij}^k احتمال الوصول إلى الحالة j علماً أننا في الحالة i حيث k القرار المتخذ
(هنا n تدل على المرحلة u_i^n)

• ليكن r_i^k الدخل علماً أننا في المرحلة i و k القرار المتخذ.

• u_i^n هو التوقع الأفضل في حال كنا في الحالة i وذلك في الفترة n.

• u_i^0 هو التوقع الأفضل في الحالة الابتدائية. (الأمثل)

مسألة: صالة عرض تتسع في نهاية كل فترة لـ 3 سيارات. خلال الفترة الكلفة الابتدائية للتصنيع هي ٤٥ مليون، كلفة تصنيع السيارة الواحدة هي 10 مليون وكلفة عرضها للسيارة هي ١٠ مليون. في كل فترة إما الطلب 1 (سيارة واحدة) أو 2 (سيارتين) في الفترة النهائية تباع السيارة لقطع غيار بسعر 5 مليون.

① حدد الاستراتيجية المثلى لتحقيق توقع الكلفة الأصغر.

② أوجد الاستراتيجية المثلى لأجل فترتين حيث لدينا ابتدائياً سيارة واحدة في صالة العرض.

الحل: تحديد: ① الحالات: ((عدد السيارات التي لدينا)) $S=\{0,1,2,3\}$

② القرارات K_i: عدد السيارات الواجب انتاجها في الفترة i
(إذا كنا بالحالة i).

③ الاحتمالات. ④ الكلفة.

ويجب أن نكتب التابع u_i^n ← قد لا نحتاج حساب الأسس الآن.

• $K_i=\{K : Max\{0, \underbrace{2}_{\text{الطلب الأكثر}}-i\} \le K \le 3-i+\underbrace{1}_{\text{الطلب الأقل}}\}$

عدد السيارات الواجب انتاجها

* استبدال k كاشتراء: $2 \le k+i \le 4$

(i) عدد سيارات التي ستبقى عدد سيارات يشتري (k)

أي (k+i) لم أقل 2 حيث أنه إذا كانت الطلبية 2 يكون متواجد عندي سيارتين و لم الأكثر 4 لأنه في حال كانت الطلبية ما تبقى مني 3 سيارات ويكون عندي 3 أماكن لها بينما إذا كانت أكثر من 4 فلا يبقى أماكن للسيارات مهما كانت الطلبية //

• الاحتمالات:

$$p^k_{ij} = \begin{cases} 0.5 & i+k-1 \\ 0.5 & i+k-2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

لاحتمال لدي i سيارة و أصبح عدد سيارات j كما أننا اشترينا k سيارة).

• الكلفة:

$$C_i^k = \begin{cases} 40 + 10k + 10\left[(0.5)(k+i-1) + (0.5)(k+i-2)\right] & k > 0 \\ 0 + 10\left[0.5(i-1) + 0.5(i-2)\right] & k = 0 \end{cases}$$

// الاحتمالات تتغير حسب صيغة السؤال //

الشرح: 40: كلفة البدء بالتصنيع

10k: كلفة تصنيع k سيارة

$10[(0.5)(k+i-1)+(0.5)(k+i-2)]$: كلفة (10) للسيارة و الباقي توقع العرض بعد الطلبية

• التابع V_i^n: لكن V_i^n توقع أقل كلفة يا حال لدينا i سيارة و n الفترات من 0 → n.

الفترة السابقة

$$V_i^n = \min_{\max\{0,2-i\} \le k \le 4-i} \left\{ C_i^k + 0.5\, V^{n-1}_{k+i-1} + 0.5\, V^{\boxed{n-1}}_{i+k-2} \right\}$$

• التابع V_i^0:

$$V_i^0 = -5i$$

الشرح: إذا بقي لدينا أي سيارة و لم تعرض كلفتها كانت 10 مليون و بالتالي سيباع كل قطع غيار بـ 5 مليون فتصبح الكلفة 5 مليون مطروحة لعدد سيارات التي تبقت

(2) - إن المطلوب V_1^2:

$$V_1^2 = \min_{1 \le k \le 3} \left\{ C_1^k + 0.5\, V_k^1 + 0.5\, V_{k-1}^1 \right\}$$

$$= \min \left\{ C_1^1 + 0.5\, V_1^1 + 0.5\, V_0^1 ,\ C_1^2 + 0.5\, V_2^1 + 0.5\, V_1^1 ,\ C_1^3 + 0.5\, V_3^1 + 0.5\, V_2^1 \right\}$$

/ /

المحاضرة السادسة تمرين: النموذج العام للتابع: $V_i^n = \underset{k \in A}{Max} \{ r_i^k + \sum_{j \in S} p_j^k \, V_j^{n-1} \}$ الذي يعطي التوقع الأفضل

// شرح التابع: ① التابع V_i^n يجب ان يقرر الربح الأكبر في الفترات من 0 ← n

② r_i^k هو الربح في الفترة n } مجموعها هو الربح في الفترات

③ $\sum_{j \in S} p_j^k \, V_j^{n-1}$ الربح في الفترات 0 ← n-1 } 0 ← n

④ k القرار المتخذ $j \in S$ A مجموعة القرارات

⑤ S مجموعة كل الحالات. //

ملاحظة: لأجل كل مسألة بالنسبة لي أكتب V_i^n من المطلوب (توقع أكبر ربح أو أقل كلفة أو ...) و أوضح كل الاحتمالات p^k وكل الحالات i و القرارات k (أي تعيين مجال k)، وتحدد الحالة الابتدائية للمسألة V_i^0.

المسألة بالمحاضرة السابقة: طلب تعيين أقل كلفة لذلك كتبنا التابع كالتالي:

$$V_i^n = Min \{ C_i^k + 0,5 \, V_{i+k-1}^{n-1} + 0,5 \, V_{i+k-2}^{n-1} \}$$
$$Max \{0, 2-i\} \le k \le 4-i$$

// شرح التابع: ① V_i^n هو التابع الذي يجب أن يقرر أقل كلفة في الفترات 0 ← n (استخدمنا Min لأن المطلوب أقل)

② C_i^k هو الكلفة في الفترة n

③ $\sum_{j \in S} p_j^k \, V_j^{n-1} = 0,5 \, V_{i+k-1}^{n-1} + 0,5 \, V_{i+k-2}^{n-1}$

هنا الحالات S هي حالتين: إما الطلبية الأولى: $j = (i+k-1)$ و باحتمال $p_{i+k-1}^k = 0,5$ أو الطلبية الثانية: $j = (i+k-2)$ و باحتمال $p_{i+k-2}^k = 0,5$

④ k القرار المتخذ تعيين مجاله: لدينا i عدد السيارات الموجودة عندي و k عدد السيارات الواجب إنتاجها، يجب أن يكون $k + i \ge$ شرط المعروضة ① سواء أكانت الطلبية الأولى أو الثانية ② والأماكن الشاغرة للعرض 3 أماكن لذلك يجب أن يكون $2 \le k + i \le 4$

$$\Rightarrow 2 - i \le k \le 4 - i$$

/ /

لأن في حالة كانت $i>2$ $\Leftarrow$ $(2-i)$ سيكون مقدار سالب لذلك وضعنا الاختيار

$\max\{0, 2-i\} \le K \le 4-i$ (للأكبر بين 0 و $2-i$)

5 ـ واضح من السابق أنه إذا كان n هي الطلبية الأولى أو الطلبية الثانية.

$v_i^0 = -5i \longleftarrow$ الكلفة بوصول 0=K إلى المخزن

الإيجارة (زيادة بيارات الإنتاج)

المطلوب: v_1^2 أي $i=1$ $n=2$ $k=1$

$$\bullet\ V_1^2 = \underset{1 \le K \le 3}{\mathrm{Min}} \{ C_i^K + 0{,}5 (V_{i+K-1}^{n-1} + V_{i+K-2}^{n-1}) \}$$

$$V_1^2 = \underset{1 \le K \le 3}{\mathrm{Min}} \{ C_1^1 + 0{,}5 (V_1^1 + V_0^1),\ C_1^2 + 0{,}5 (V_2^1 + V_1^1),\ C_1^3 + 0{,}5 (V_3^1 + V_2^1) \}$$

$$\bullet\ V_0^1 = \underset{2 \le K \le 4}{\mathrm{Min}} \{ C_0^2 + 0{,}5 (V_1^0 + V_0^0),\ C_0^3 + 0{,}5 (V_2^0 + V_1^0),\ C_0^4 + 0{,}5 (V_3^0 + V_2^0) \}$$

$$\bullet\ C_i^K = \begin{cases} 40 + 10K + 10 [0{,}5 (i+K-1) + 0{,}5 (i+K-2)] & K > 0 \\ 0 + 10 [0{,}5 (i-1) + 0{,}5 (i-2)] & K = 0 \end{cases}$$

الكلفة حسب القرار K

$$C_1^1 = 40 + 10 + 10 (0{,}5 (1) + 0{,}5 (0)) = \boxed{}$$

$$\Rightarrow V_0^1 = \underset{2 \le K \le 4}{\mathrm{Min}} \{ \underset{K=2}{62{,}5},\ \underset{K=3}{77{,}5},\ \underset{K=4}{92{,}5} \} = 62{,}5 \quad (\text{القرار الأمثل } K=2)$$

$$V_1^0 = -5 , \quad V_2^0 = -5 \times 2 = -10$$

$$V_1^1 = \underset{1 \le K \le 3}{\mathrm{Min}} \{ 52{,}5 ,\ 67{,}5 ,\ 82{,}5 \} = 52{,}5 \qquad (K=1)$$

$$V_2^1 = \underset{0 \le K \le 2}{\mathrm{Min}} \{ 42{,}5 ,\ 57{,}5 ,\ 72{,}5 \} = 42{,}5 \qquad (K=0)$$

/ /

$V_3^1 = \underset{0\le k\le 1}{\min}\{47.5 , 62.5\} = 47.5$ $(k=0)$

$V_1^2 = \underset{1\le k\le 3}{\min}\{112.5 , 122.5 , 140\} = 112.5$ $(k=1)$

الاستراتيجية المثلى التي تحقق اقل كلفة :
الفترة 2 عليك انتاج سيارة واحدة في حال الطلبية كانت سيارة واحدة في الاولى انه تقوم بانتاج سيارة في الفترة 1 اما اذا كانت الطلبية سيارتين فعليك انتاج سيارتين في الفترة 1 وتكون الكلفة الاقل هي 112,5 .

مسالة : على فرض انه يكون باحدى الحالات التالية : ① ممتازة ② متوسطة ③ سيئة . تكلفة تشغيل الآلة هي 1000 او 5000 او 10000 حسب حالة الآلة ① او ② او ③ على الترتيب .
يمكن استبدال الآلة بآلة ممتازة جديدة 15000 او ابقاء الآلة السابقة . في الاسبوع التالي اذا كانت الآلة ممتازة يمكن ان تبقى ممتازة باحتمال $\frac{1}{2}$ او ان تصبح متوسطة باحتمال $\frac{1}{2}$ ، اذا كانت الآلة متوسطة يمكن ان تبقى متوسطة باحتمال 75% او ان تصبح سيئة باحتمال 25% . اما اذا كانت الآلة سيئة فانها ستبقى كذلك للاسبوع التالي .

• تم بناء المسالة بنظام سلاسل ماركوف وذلك حسب مناسباته وذلك لتحقيق توقع اقل كلفة وذلك لتشغيل الآلة n اسبوع .

طلب اضافي : ما هي الاستراتيجية المثلى لتشغيل الآلة اسبوعين اذا كانت الآلة ابتدائيا متوسطة .

الحل : نعين الحالات والقرارات (ابقاء او) والاحتمالات والكلفة وانتاج V_i^n , V_i^0

(الأخيرة)

المحاضرة السابعة عشر : حل المسألة الوظيفة:

كانت الحالات

1. ممتازة 1000 — 2. متوسطة 5000 — 3. سيئة 10000

$1 \xrightarrow{0.5} 1$ ، $1 \xrightarrow{0.5} 2$ ؛ $2 \xrightarrow{0.75} 2$ ، $2 \xrightarrow{0.25} 3$ ؛ $3 \to 3$

* القرارات: { إبقاء الآلة (الاستمرار في التشغيل) ، استبدال.

بحيث نجد: ① الحالات: $S = \{1, 2, 3\}$ كل مفصل: ممتازة ، متوسطة ، سيئة

② القرارات K : $K = \{Ke, Re\}$ إبقاء ، استبدال

③ الاحتمالات p_{ij}^{k}

نجد كل الاحتمالات من أجل كل القرارات K

Ke إبقاء

$P_{11} = 0.5$ — كانت ممتازة وبقيت ممتازة

$P_{12} = 0.5$ — كانت ممتازة وأصبحت متوسطة

$P_{13}^{Ke} = 0$ — كانت ممتازة وأصبحت سيئة

$P_{21}^{ke} = 0$, $P_{22}^{ke} = 0.75$, $P_{23}^{ke} = 0.25$

$P_{31}^{ke} = 0$, $P_{32}^{ke} = 0$, $P_{33}^{ke} = 1$

Re استبدال

$$P_{ij} = \begin{cases} 0.5 & j = 1 \\ 0.5 & j = 2 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} , \quad \forall i$$

$\forall i = 1,2,3 \xrightarrow{\text{استبدال}} 1$ ممتازة: $\xrightarrow{0.5} 1 \quad j=1$ ، $\xrightarrow{0.5} 2 \quad j=2$ ← أسبوع واحد

④ الدخل (الكلفة):

$C_1^{Ke} = 1000 \quad C_2^{Ke} = 5000 \quad C_3^{Ke} = 10000$

$C_1^{Re} = C_2^{Re} = C_3^{Re} = 15000 + 1000 = 16000$

/ /

⑤ تعريف V_1^n ، معادلة V_1^n والحالة الابتدائية V_1^0 . ⑤ الفقرة

V_1^n = الاستراتيجية المثلى لتعظيم توقع الكلفة الأمثل وذلك في n أسبوع في حال كانت الآلة في الحالة 1 .

* (تعريف V_1^n)

$$V_1^n = \underset{k\in\{ke,Re\}}{Min}\{C_1^k + \sum_{j=1}^{3} p_{1j}^k \cdot V_j^{n-1}\}$$

* (معادلة V_1^n)

حالة وتصبح j .

$V_1^0 = 0$ (لم يذكر في المسألة شيء عن الحالة الابتدائية)

* (الحالة الابتدائية V_1^0).

// ملاحظة خارجية // إذا قورنت بالحالة: الإصابات 3 2 1 حسب الحالة خارج.

5 3 0 $\Rightarrow V_1^0 = -5 \quad V_2^0 = -3 \quad V_3^0 = 0$ //

الطلب الثاني: الاستراتيجية المثلى لتحقيق توقع الكلفة الأقل إذا كانت الآلة متوسطة وذلك لتشغيلها 2 أسبوع .

الحل: هنا المطلوب إيجاد $V_2^2 \Leftarrow$

$$V_2^2 = \underset{k\in\{ke,Re\}}{Min}\{C_2^{ke} + \sum_{j=1}^{3} p_{2j}^{ke} V_j^1 \, , \, C_2^{Re} + \sum_{j=1}^{3} p_{2j}^{Re} V_j^1\}$$

. $\sum_{j=1}^{3} p_{2j}^{ke} V_j^1 = 0 + 0{,}75\, V_2^1 + 0{,}25\, V_3^1$

. $\sum_{j=1}^{3} p_{2j}^{Re} V_j^1 = 0{,}5\, V_1^1 + 0{,}5\, V_2^1 + 0\, V_3^1$

((هنا سوف تتبع الاستراتيجية المثلى اختيار إبقاء // نتابع بالحل //))

. لنحسب لنفس الطلب في حال كانت الآلة سيئة وتشغيلها 2 أسبوع .

الحل: هنا المطلوب V_3^2 :

$$V_3^2 = \underset{k\in\{ke,Re\}}{Min}\{C_3^{ke} + \sum_{j=1}^{3} p_{3j}^{ke} V_j^1 \, , \, C_3^{Re} + \sum_{j=1}^{3} p_{3j}^{Re} V_j^1\}$$

$$= Min\{\underbrace{10000 + V_3^1}_{\text{إبقاء}} \, , \, \underbrace{16000 + 0{,}5(V_1^1 + V_2^1)}_{\text{استبدال}}\}$$

المطلوب: $V_3^1 \, , \, V_1^1 \, , \, V_2^1$

/ /

$V_1^1 = \mathrm{Min}\{ \underset{1000}{C_1^{Ke}} + 0{,}5(V_1^0 + V_2^0)\ ,\ \underset{16000}{C_1^{Re}} + 0{,}5(V_1^0 + V_2^0) \} = 1000$

$=0$ بالاعتبار ومتناظرة $=0$

القرار $K = Ke$ (إبقاء الآلة)

$V_2^1 = \mathrm{Min}\{ C_2^{Ke} + 0{,}75 V_2^0 + 0{,}25 V_3^0\ ,\ C_2^{Re} + 0{,}5(V_1^0 + V_2^0) \}$

$= \mathrm{Min}\{5000, 16000\} = 5000$ $K = Ke$. (إبقاء)

$V_3^1 = \mathrm{Min}\{ C_3^{Ke} + V_3^0\ ,\ C_3^{Re} + 0{,}5(V_1^0 + V_2^0)\} = \mathrm{Min}\{10000, 16000\} = 10000$

$K = Ke$. (إبقاء)

إذا كانت في الأسبوع المقبل الآلة

$V_3^{(2)} = \mathrm{Min}\{10000 + 1000\ ,\ 16000 + 0{,}5(1000 + 5000)\} =$

$\mathrm{Min}\{20000, 19000\} = 19000$ $K = Re$. (استبدال)

(نرجع لقانون V_3^2)

• الاستراتيجية المثلى التي تحقق أقل توقع كلفة هي استبدال الآلة في الأسبوع الأول و إبقاء الآلة في الأسبوع الثاني (في حال لقيت ممتازة أو في حال أصبحت متوسطة) ويكون توقع أقل كلفة عند هذه الاستراتيجية 10000