نظري

◀ دكتور المادة: ملك مارديني

◀ المحاضرة: الخامسة عشر عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الجزئية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـحلول المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى غير الخطية.

٢ـمبرهنة الدوال الضمنية.

٣ـطريقة شارب في حل المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية.

تذكرة:

لقد مر معنا سابقاً أنه إذا كان لدينا التابع $Z = Z(x,y)$ تابع بمتغيرين مستقلين فإن تفاضل هذا التابع هو:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy$$

وفي حال كانت معادلة السطح $F(x,y,z) = 0$ فإن التفاضل الكلي للسطح هو :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

حلول المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى غير الخطية:

مبرهنة الدوال الضمنية:

ليكن لدينا الدالتين $F(x,y,z,p,q) = 0 \;\; \&\& \;\; \Phi(x,y,z,p,q) = 0$ حيث p,q دالتين بمجهولين ثابتين للمتغيرات المستقلة x,y,z عندها تكون المشتقات الجزئية التالية بالعلاقة :

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\left(-\left(\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{y}}-\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}\right)\right)}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}}\ldots\ldots\ldots..(II)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{z}}-\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}}\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{z}}-\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}\right)}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV)$$

إثبات العلاقة (I) لنأخذ المشتقات الجزئية لكل من Φ, F بالنسبة ل x, y, z ومنه:

$$1)\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}$$

(وذلك كون p, q يتبعان لمجهولين ثابتين للمتغيرات x, y, z)

$$2)\ \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}$$

$$3)\ \frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z}$$

$$4)\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$5)\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}$$

$$6)\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z}$$

لنأخذ الآن من (١) و (٤) نجد:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial F}{\partial p}}\qquad \text{من } (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}}\qquad \text{من } (4)$$

بالمساواة طرفاً إلى طرف نجد :

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}}\xRightarrow{\text{نأخذ جداء الطرفين بالوسطين}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}+\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}=\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}$$

نجعل الحدود التي فيها $\frac{\partial q}{\partial x}$ بطرف والباقي بطرف آخر :

$$\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}-\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}\xRightarrow{\text{نخرج } \frac{\partial \mathrm{q}}{\partial \mathrm{x}} \text{ عامل مشترك}}$$

$$\frac{\partial q}{qx}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{p}}-\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}\right]=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}\Longrightarrow$$

$$\frac{\partial q}{qx}=\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}}$$ وهو المطلوب

طريقة شارب في حل المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية

$$F(x,y,z,p,q)=0\ \ldots\ldots\ldots.\quad(1):p=\frac{\partial z}{\partial x}\ \&\&\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

ولتكن لدينا المعادلة $\Phi(x,y,z,p,q,a)=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

حيث a ثابت اختياري وتحقق الشرطين التاليين:

١) إن حل المعادلتين (2)و(1) بالنسبة ل p,q هو من الشكل :

$$\left.\begin{aligned}p&=p(x,y,z,a)\\ q&=q(x,y,z,a)\end{aligned}\right\}\ 3$$

٢) المعادلة التفاضلية الكلية $dz=pdx+qdy\ \ldots\ldots..(4)$ قابلة للحل عندئذ :

نسمي المعادلة (2) معادلة مرافقة ل (1) الآن نعوض (3) في (4) ومنه :

$$dz=p(x,y,z,a)dx+q(x,y,z,a)dy\ \ \ldots\ldots\ldots.(5)$$

إن المعادلة (5) محتمل أن تمتلك حل ومحتمل أن لا تمتلك

في حال كانت تمتلك حل من الشكل: $F(x,y,z,a,b)=0\ \ \ldots\ldots\ldots..(6)$

فيكون حل تام للمعادلة (1) لنرى كيف يتم ذلك باتباع المخطط التالي:

(6) حل ل (3) $\overset{\text{وبالتالي}}{\Longrightarrow}$ (5) حل للمعادلة (3) $\overset{\text{وبالتالي}}{\Longrightarrow}$ المعادلة(6) حل للمعادلة(5)

(6) حل ل(1) $\overset{\text{فإن}}{\Rightarrow}$ وكون (3) حل ل(2)و(1)

والآن لنعين الشرط الذي يجب تحققه (1) حتى تكون (2) هي معادلة تفاضلية مترافقة مع (1)

لنأخذ مشتق q بالنسبة ل x يساوي مشتق p بالنسبة ل y ومنه:

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{q}=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{p}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z}\Longrightarrow II+qIII=I+p\,IV$$

وبالتعويض في علاقات نظرية الدوال الضمنية وبالاختصار نحصل على المساواة التالية:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial F}-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p}-$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى خطية وحلها التام نحصل عليه من إيجاد الجملة الملحقة :

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}=-\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}\ldots\ldots\ldots(8)$$

إن (8) هي الجملة المساعدة ومنه نوجد حل هذه الجملة بحيث يكون الحل فيه q أو p أو كلاهما وهذا الحل يمثل قابلية الحل للمعادلة (5)

◄ والآن لنلخص طريقة ليسهل علينا حل التمارين .

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية نتبع الخطوات التالية:

١) نحسب المشتقات الجزئية للمعادلة $F(x,y,z,p,q)=0 \dots\dots\dots (1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z},\frac{\partial F}{\partial p},\frac{\partial F}{\partial q}$$

ثم نقوم بتعويض المشتقات الجزئية في الجملة المساعدة رقم (8) .

٢) نوجد أي حل تام للجملة المساعدة وليكن $\Phi(x,y,z,p,q,a)=0 \dots\dots\dots (2)$

شرط أن يحتوي على p أو q أو كلاهما.

٣) نحل المعادلتين $(1)\&\&(2)$ بالنسبة ل p,q نحل على :

$$(3)\dots\dots\begin{cases} p=p(x,y,z,a) \\ q=q(x,y,z,a) \end{cases}$$

٤) نعوض (3) في (4) والتي هي : $dz=pdx+qdy \dots\dots\dots (4)$

٥) نوجد حل للمعادلة (4) وليكن : $F(x,y,z,a,b)=0 \dots\dots\dots (5)$

وهو الحل التام للمعادلة التفاضلية (1)

لتكن $b=\tau(a)$ يطلق عليها تاوٍ a عندها $F(x,y,z,a,\tau(a))$ يدعي حل عام حيث $\tau(a)$ دالة اختيارية إذا كانت $\tau(a)$ دالة معينة فيكون (6) حل خاص.

- إذا كان مغلف مجموعة السطوح (5) موجوداً فهو يمثل حل شاذ.

مثال:

أوجد الحل التام للمعادلة التفاضلية التالية بطريقة شارب:

$$pq-px-qy=0 \dots\dots (1)$$

الحل: لنوجد المشتقات الجزئية وذلك تبعاً لخطوات تلخيص فقرة شارب:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-p\ ,\frac{\partial F}{\partial y}=-q\ \ ,\frac{\partial F}{\partial z}=0\ ,\frac{\partial F}{\partial p}=(q-x)\,,\frac{\partial F}{\partial q}=(p-y)$$

والآن نعوض المشتقات في الجملة الملحقة :

$$\frac{dx}{q-x}=\frac{dy}{p-y}=\frac{dz}{2pq-px-qy}=-\frac{dp}{-p}=-\frac{dq}{-q}$$

الأسهل لنا كحل أن نأخذ النسبتين $(4)\&\&(5)$ ومنه:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}\xRightarrow{\text{بالمكاملة}}\ln p=\ln q+\ln a\to p=aq\xRightarrow{\text{نعوض قيمة } p \text{ في}(1)}$$

$$aq^2-aqx-qy=0$$

$$q(aq-ax-y)=0$$

نميز حالتين :

١) إن $q=0$ مرفوض لأن q تابع ل x,y,z وبالتالي:

$$aq-ax-y=0\Rightarrow q=\frac{ax+y}{a}\Rightarrow q=x+\frac{y}{a}\Rightarrow$$

$$dz=pdx+qdy\xRightarrow{\text{نعوضهما } p,q}(ax+y)dx+\left(x+\frac{y}{a}\right)dy\ \Rightarrow$$

$$dz=axdx+\underbrace{ydx+xdy}_{\text{مشتق جداء}}+\frac{y}{a}\,dy\ \Rightarrow dz=axdx+\frac{y}{a}dy+d(x.y)\xRightarrow{\text{بالمكاملة}}$$

$$z=\frac{a}{2}x^2+\frac{y^2}{2a}+x.y+b$$ وهذا هو الحل العام

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه