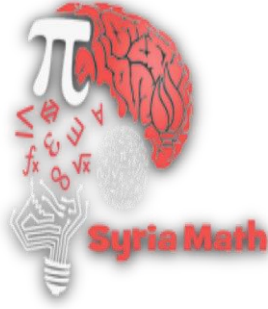


4-5-2017

نظري

◀ دكتور الملاءة: ملك مارديني

◀ المحاضرة: الخامسة عشر عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الجزئية



**المحتوى العلمي :** أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- حلول المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى غير الخطية.

٢- مبرهنة الدوال الضمنية.

٣- طريقة شارب في حل المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية.

**تذكرة:**

لقد مر معنا سابقاً أنه إذا كان لدينا التابع  $Z = Z(x, y)$  تابع بمتغيرين مستقلين فإن تفاضل هذا التابع هو:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$$

وفي حال كانت معادلة السطح  $F(x, y, z) = 0$  فإن التفاضل الكلي للسطح هو :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

**حلول المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى غير الخطية:**

**مبرهنة الدوال الضمنية:**

ليكن لدينا الدالتين  $\Phi(x, y, z, p, q) = 0$  و  $F(x, y, z, p, q) = 0$  حيث  $p, q$  دالتين بمجهولين

ثابنتين للمتغيرات المستقلة  $x, y, z$  عندها تكون المشتقات الجزئية التالية بالعلاقة :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q}} \dots \dots \dots (I)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\left( - \left( \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right)}{\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q}} \dots \dots \dots (II)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q}} \dots \dots \dots (III)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)}{\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q}} \dots \dots \dots (IV)$$

إثبات العلاقة (I) لناخذ المشتقات الجزئية لكل من  $\Phi, F$  بالنسبة ل  $x, y, z$  ومنه:

$$1) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}$$

(وذلك كون  $p, q$  يتبعان لمجهولين ثابتين للمتغيرات  $x, y, z$ )

$$2) \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$3) \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial z}$$

$$4) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$5) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y}$$



$$6) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial z}$$

لنأخذ الآن من (١) و (٤) نجد:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \right)}{\frac{\partial F}{\partial p}} \quad \text{من (1)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}} \quad \text{من (4)}$$

بالمساواة طرفاً إلى طرف نجد :

$$\frac{\left( \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \right)}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}} \quad \xrightarrow{\text{نأخذ جداء الطرفين بالوسطين}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial p}$$

نجعل الحدود التي فيها  $\frac{\partial q}{\partial x}$  بطرف والباقي بطرف آخر :

$$\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad \xrightarrow{\text{نخرج } \frac{\partial q}{\partial x} \text{ عامل مشترك}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} \left[ \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial F}{\partial p}} \quad \text{وهو المطلوب}$$

**طريقة شارب في حل المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية:**

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \dots \dots \dots (1) : p = \frac{\partial z}{\partial x} \ \&\& \ q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Phi(x, y, z, p, q, a) = 0 \dots \dots \dots (2) \text{ ولتكن لدينا المعادلة}$$

حيث  $a$  ثابت اختياري وتحقق الشرطين التاليين:

(١) إن حل المعادلتين (2) و(1) بالنسبة ل  $p, q$  هو من الشكل :

$$\left. \begin{aligned} p &= p(x, y, z, a) \\ q &= q(x, y, z, a) \end{aligned} \right\} \textcircled{3}$$

(٢) المعادلة التفاضلية الكلية (4)  $dz = p dx + q dy \dots \dots \dots$  قابلة للحل عندئذ :

نسمي المعادلة (2) معادلة مرافقة ل (1) الآن نعوض (3) في (4) ومنه :

$$dz = p(x, y, z, a) dx + q(x, y, z, a) dy \dots \dots \dots (5)$$

إن المعادلة (5) محتمل أن تمتلك حل ومحتمل أن لا تمتلك

في حال كانت تمتلك حل من الشكل: (6)  $F(x, y, z, a, b) = 0 \dots \dots \dots$

فيكون حل تام للمعادلة (1) لنرى كيف يتم ذلك باتباع المخطط التالي:

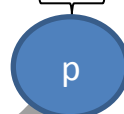
$$(6) \text{ حل ل } (3) \xRightarrow{\text{وبالتالي}} (5) \text{ حل للمعادلة } (3) \xRightarrow{\text{وبالتالي}} (6) \text{ حل للمعادلة } (5)$$

(6) حل ل(1)  $\Rightarrow$  فان يكون (3) حل ل(2) و(1)

والآن لنعين الشرط الذي يجب تحققه (1) حتى تكون (2) هي معادلة تفاضلية مترافقة مع (1)

لنأخذ مشتق  $q$  بالنسبة ل  $x$  يساوي مشتق  $p$  بالنسبة ل  $y$  ومنه:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$



$$\frac{\partial p}{\partial y} + q \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z} \Rightarrow II + qIII = I + p IV$$

وبالتعويض في علاقات نظرية الدوال الضمنية وبالاختصار نحصل على المساواة التالية:

$$\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left( p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \left( \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \left( \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى خطية وحلها التام نحصل عليه من إيجاد الجملة الملحقة :

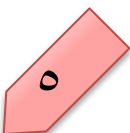
$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q}} = - \frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z}} \dots \dots \dots (8)$$

إن (8) هي الجملة المساعدة ومنه نوجد حل هذه الجملة بحيث يكون الحل فيه  $q$  أو  $p$  أو كلاهما وهذا

الحل يمثل قابلية الحل للمعادلة (5)

◀ والآن لنلخص طريقة ليسهل علينا حل التمارين .

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية نتبع الخطوات التالية:



(1) نحسب المشتقات الجزئية للمعادلة  $F(x, y, z, p, q) = 0 \dots \dots \dots$

$$\frac{\partial F}{\partial x} , \frac{\partial F}{\partial y} , \frac{\partial F}{\partial z} , \frac{\partial F}{\partial p} , \frac{\partial F}{\partial q}$$

ثم نقوم بتعويض المشتقات الجزئية في الجملة المساعدة رقم (8) .

(2) نوجد أي حل تام للجملة المساعدة وليكن  $\Phi(x, y, z, p, q, a) = 0 \dots \dots \dots$

شروط أن يحتوي على  $q$  أو  $p$  أو كلاهما.

(3) نحل المعادلتين (1)&(2) بالنسبة ل  $p, q$  نحل على :

$$(3) \dots \dots \dots \begin{cases} p = p(x, y, z, a) \\ q = q(x, y, z, a) \end{cases}$$

(4) نعوض (3) في (4) والتي هي :  $dz = p dx + q dy \dots \dots \dots$

(5) نوجد حل للمعادلة (4) وليكن :  $F(x, y, z, a, b) = 0 \dots \dots \dots$

وهو الحل التام للمعادلة التفاضلية (1)

لتكن  $b = \tau(a)$  يطلق عليها تاو  $a$  عندها  $F(x, y, z, a, \tau(a))$  يدعي حل عام حيث  $\tau(a)$

دالة اختيارية إذا كانت  $\tau(a)$  دالة معينة فيكون (6) حل خاص.

- إذا كان مغلف مجموعة السطوح (5) موجوداً فهو يمثل حل شاذ.

**مثال:**

أوجد الحل التام للمعادلة التفاضلية التالية بطريقة شارب:

$$pq - px - qy = 0 \dots \dots \dots (1)$$

**الحل:** لنوجد المشتقات الجزئية وذلك تبعاً لخطوات تلخيص فقرة شارب:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -p, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = (q - x), \quad \frac{\partial F}{\partial q} = (p - y)$$

والآن نعوض المشتقات في الجملة الملحقة :

$$\frac{dx}{q - x} = \frac{dy}{p - y} = \frac{dz}{2pq - px - qy} = -\frac{dp}{-p} = -\frac{dq}{-q}$$

الأسهل لنا كحل أن نأخذ النسبتين (4) و(5) ومنه:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln p = \ln q + \ln a \rightarrow p = aq \xrightarrow{\text{نعوض قيمة } p \text{ في (1)}}$$

$$aq^2 - aqx - qy = 0$$

$$q(aq - ax - y) = 0$$

نميز حالتين :

(1) إن  $q = 0$  مرفوض لأن  $q$  تابع ل  $x, y, z$  وبالتالي:

$$aq - ax - y = 0 \Rightarrow q = \frac{ax+y}{a} \Rightarrow q = x + \frac{y}{a} \Rightarrow$$

$$dz = p dx + q dy \xrightarrow{\text{نعوضهما } p, q} (ax + y) dx + \left(x + \frac{y}{a}\right) dy \Rightarrow$$

$$dz = ax dx + y dx + x dy + \frac{y}{a} dy \Rightarrow dz = ax dx + \frac{y}{a} dy + d(x \cdot y) \xrightarrow{\text{بالمكاملة}}$$

مشتق جداء

$$z = \frac{a}{2} x^2 + \frac{y^2}{2a} + x \cdot y + b \quad \text{وهذا هو الحل العام}$$

انتهت الماضرة

إعداد: محمد شهلا - فادي الشريطي - ميار طعمه