علم المنطق

الدكتورة : ريما القمحة

عبد الرحمن الزعبي
ريم الرحبي

رقم المحاضرة : 10

بسم الله الرحمن الرحيم

العمليات على المجموعات الترجيحية :

١) احتواء مجموعتين ترجيحيتين :

لتكن A , B مجموعتين ترجيحيتين جزئيتين من المجموعة الشاملة نسبياً X ، عندئذٍ نقول عن A أنها محتواه في B و نكتب $A \subseteq B$ إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{\mu_A(x)} \leq \boldsymbol{\mu_B(x)}$$

مثال : لتكن $X = \{1,2,3)$ المجموعة الشاملة نسبياً و لتكن A,B مجموعتين ترجيحيتين جزئيتين من المجموعة الشاملة نسبياً X

$$A = \left\{\frac{0.3}{1}, \frac{0.5}{2}, \frac{1}{3}\right\} \quad , \quad B\left\{\frac{0.5}{1}, \frac{0.55}{2}, \frac{1}{3}\right\}$$

هل $B \subseteq A$ ؟

إن $B \nsubseteq A$ لوجود :

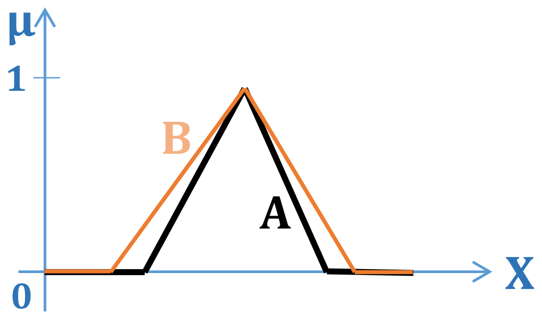
$$1 \in X : \mu_B(1) = 0.5 \nleq \mu_A(1) = 0.3$$

هل $A \subseteq B$ ؟

$$1 \in X : \mu_A(1) = 0.3 \leq \mu_B(1) = 0.5$$
$$2 \in X : \mu_A(2) = 0.5 \leq \mu_B(1) = 0.55$$
$$3 \in X : \mu_A(3) = 1 \leq \mu_B(1) = 1$$

ومنه : $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{\mu_A(x)} \leq \boldsymbol{\mu_B(x)}$

مثال : إذا كانت A, B مجموعتين ترجيحيتين جزئيتين من المجموعة الشاملة نسبياً X بحيث لها البيان التالي :



هل $A \subseteq B$ ؟

إن $A \subseteq B$ لأنه :

$$\forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

---

٢) تساوي مجموعتين ترجيحيتين :

لتكن A , B مجموعتين ترجيحيتين جزئيتين من المجموعة الشاملة نسبياً X ، عندئذٍ نقول إن $A = B$ إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{\mu_A(x) = \mu_B(x)}$$

٣) تقاطع مجموعتين ترجيحيتين (التقاطع الترجيحي) :

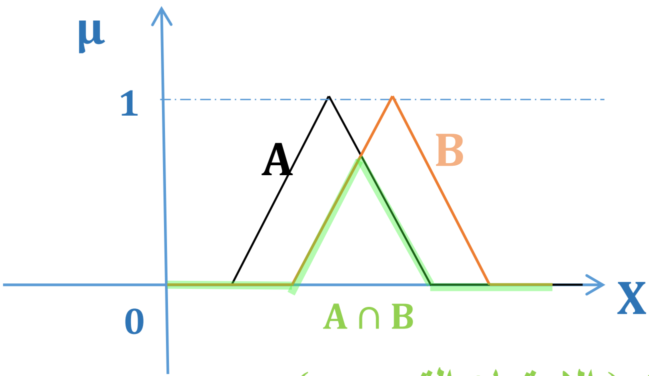
لتكن A , B مجموعتين ترجيحيتين جزئيتين من المجموعة الشاملة نسبياً X ، عندئذٍ نعرف التقاطع الترجيحي $A \cap B$ بأنه أكبر مجموعة ترجيحية محتواه في كليهما معاً ، أي :

$$\forall x \in X : \mu_{A\cap B}(x) = Min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

ومنه يمكن أن نكتب :

$$A \cap B = \left\{ \frac{Min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{x_i} ; \forall x_i \in X \ , i = 1,2,3, \dots \right\}$$

مثال :



٤) اجتماع مجموعتين ترجيحيتين (الاجتماع الترجيحي)

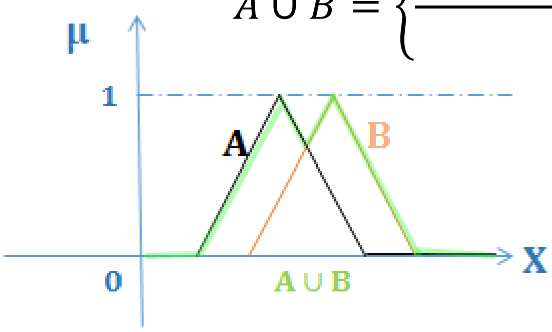
لتكن A , B مجموعتين ترجيحيتين جزئيتين من المجموعة الشاملة نسبياً X ، عندئذٍ نعرف الاجتماع الترجيحي $A \cup B$ بأنه أصغر مجموعة ترجيحية محتواه في كليهما معاً ، أي :

$$\forall x \in X : \mu_{A\cup B}(x) = Max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

ومنه يمكن أن نكتب :

$$A \cup B = \left\{ \frac{Max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{x_i} ; \forall x_i \in X \ , i = 1,2,3, \dots \right\}$$

مثال :



---

٥) المتمم الترجيحي

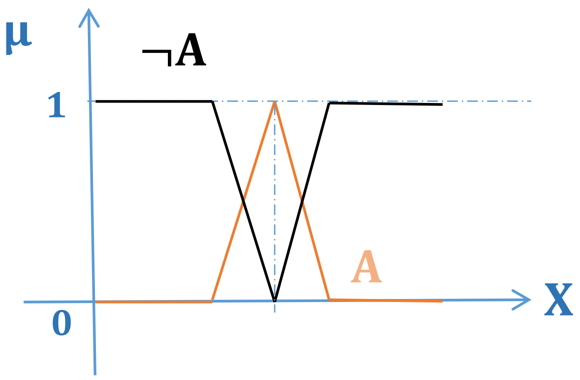
لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X ، عندئذٍ نرمز لمتمم A بـ $\neg A$ بحيث :

$$\forall x \in X : \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

ويمكن أن تكتب بالشكل :

$$\neg A = \left\{\frac{1-\mu_A(x_i)}{x_i} ; \forall x_i \in X , i = 1,2,3,..\right\}$$

مثال :



مثال : لتكن لدينا المجموعتين الترجيحيتين A و B الجزئيتين من المجموعة الشاملة نسبياً X حيث :

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

$$A = \left\{\frac{1}{a}, \frac{0.3}{b}, \frac{0.2}{c}, \frac{0.3}{d}, \frac{0}{e}\right\}$$

$$B = \left\{\frac{0.6}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.3}{d}, \frac{0.2}{e}\right\}$$

أوجد $A \cup B , A \cap B , \neg A , \neg B$

الحل :

$$A \cup B = \left\{\frac{1}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.2}{c}, \frac{0.3}{d}, \frac{0.2}{e}\right\}$$

$$A \cap B = \left\{\frac{0.6}{a}, \frac{0.3}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.3}{d}, \frac{0}{e}\right\}$$

$$\neg A=\left\{\frac{0}{a},\frac{0.7}{b},\frac{0.8}{c},\frac{0.7}{d},\frac{1}{e}\right\}$$

$$\neg B=\left\{\frac{0.4}{a},\frac{0.1}{b},\frac{0.9}{c},\frac{0.7}{d},\frac{0.8}{e}\right\}$$

تعاريف :

- **عدد عناصر المجموعة الترجيحية :** لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X حيث : $X=\{x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n\}$ عندئذٍ :

$$Card(A)=\mu_A(x_1)+\mu_A(x_2)+\cdots+\mu_A(x_n)$$

- **المجموعة الترجيحية الخالية :** تكون المجموعة الترجيحية A الجزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X ، مجموعة خالية إذا تحقق :

$$\forall x\in X:\mu_A(x)=0$$

مثال : لتكن $X=\{1,2,3\}$ لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X بحيث $A=\left\{\frac{0}{1},\frac{0}{2},\frac{0}{3}\right\}$ عندئذٍ A مجموعة ترجيحية خالية .

- **المجموعة الترجيحية الطبيعية :** تكون المجموعة الترجيحية A الجزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X ، مجموعة خالية إذا وجد عنصر $x\in X$ واحداً على الأقل بحيث تكون درجة عضويته(انتمائه) لـ A تساوي الواحد أي :

$$\exists x\in X:\mu_A(x)=1$$

- **حذف α $(\alpha-cut)$:** لتكن $\alpha\in]0,1]$ و لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X عندئذٍ نرمز لحذف α للمجموعة A بالرمز A_α ويكون :

$$A_\alpha=\{x\in X,\mu_A(x)\geq\alpha\}$$

مثال : لتكن X المجموعة الشاملة نسبياً حيث : $X=\{a,b,c,d,e\}$ ولتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X

$$A=\left\{\frac{1}{a},\frac{0.3}{b},\frac{0.2}{c},\frac{0.3}{d},\frac{0}{e}\right\}$$

هل A مجموعة طبيعية ؟ إن A مجموعة ترجيحية طبيعية لأنه :

$$\exists a\in X:\mu_A(a)=1$$

هل A مجموعة ترجيحية خالية ؟ لا لأنه :

$$\exists b \in X : \mu_A(b) \neq 0$$

احسب عدد عناصر A .

$$Card(A) = 1 + 0.3 + 0.2 + 0.3 + 0 = 1.8$$

$$A_1 = \{a\}$$

$$A_{0.8} = \{a\}$$

$$A_{0.3} = \{a, b, d\}$$

$$A_{0.2} = \{a, b, c, d\}$$

- لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X ، وليكن α عدداً ما ، عندئذٍ:

$$\alpha A = \left\{\frac{\alpha\mu_A(x)}{x}, \forall x \in X\right\}$$

$$A^\alpha = \left\{\frac{\left(\mu_A(x)\right)^\alpha}{x}, \forall x \in X\right\}$$

في المثال السابق أوجد $0.5A\ , A^2$

$$0.5A = \left\{\frac{0.5}{a}, \frac{0.15}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.15}{d}, \frac{0}{e}\right\}$$

$$A^2 = \left\{\frac{1}{a}, \frac{0.09}{b}, \frac{0.04}{c}, \frac{0.09}{d}, \frac{0}{e}\right\}$$

- **قاعدة المجموعة الترجيحية :** لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً X ، نعرف قاعدة المجموعة الترجيحية A كالتالي :

$$Support(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

وفي المثال السابق :

$$Support(A) = \{a, b, c, d\}$$

- **نواة المجموعة الترجيحية :** لتكن A مجموعة ترجيحية جزئية من المجموعة الشاملة X ، نعرف نواة المجموعة الترجيحية A كالتالي :

$$Core(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$$

وفي المثال السابق

$$Core(A) = \{a\}$$

مثال :

لتكن لدينا المجموعة الترجيحية B حيث :

$$B = \left\{\frac{0.6}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.3}{d}, \frac{0.2}{e}\right\}$$

$$Support(B) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$Core(B) = \{\,\} = \emptyset$$

العلاقات الترجيحية :

تعريف : لتكن X و Y مجموعتين غير خاليتين عندئذٍ نعرف العلاقة الترجيحية R فيما بينهما بأنها مجموعة ترجيحية جزئية من $X \times Y$ (الجداء الديكارتي) كالتالي:

$$R : X \times Y \rightarrow [0,1]$$

بحيث يكون لكل زوج *(x,y)* من $X \times Y$ عدد يتراوح بين الصفر و الواحد ، يقييس العلاقة بين x و y و تُعطى العلاقة الترجيحية على شكل مصفوفة قيمتها من المجال [0,1]

مثال : لتكن المجموعات :

$$X = \{John, Jim, Bill\} \;,\; Y = \{Fred, Mike, Sam\}$$

$R : X \times Y \rightarrow [0,1]$ و التي تقيس مقدار التشابه بين الأشخاص (علاقة التشابه الترجيحي) و تُمثل بالمصفوفة التالية :

	R	Fred	Mike	Sam
X	John	0.2	0.8	0.5
	Jim	0.9	0.3	0.0
	Bill	0.6	0.4	0.7

(Y فوق الأعمدة)

مثال: لتكن لدينا المجموعة $U\{1,2,3\}$ ولنعرف العلاقة الترجيحية التالية:

$$R : U \times U \rightarrow [0,1]$$

$$R(u,v) = \begin{cases} 1 & u = v \\ 0.8 & |u - v| = 1 \\ 0.3 & |u - v| = 2 \end{cases}$$

وبالتالي نحصل على المصفوفة التالية المعبرة عن العلاقة R

	1	2	3
1	1	0.8	0.3
2	0.8	1	0.8
3	0.3	0.8	1

العمليات على العلاقات الترجيحية :

١) **التقاطع :** لتكن R و S علاقتين ترجيحيتين على المجموعة الشاملة نسبياً $X \times Y$ حيث :

$$R : X \times Y \rightarrow [0,1]$$
$$S : X \times Y \rightarrow [0,1]$$

عندئذٍ نعرف تقاطع العلاقتين R و S كما يلي :

$$(R \cap S)(u,v) = \mathrm{Min}\{R(u,v), S(u,v)\}$$

٢) **الاجتماع :** لتكن R و S علاقتين ترجيحيتين على المجموعة الشاملة نسبياً $X \times Y$ حيث :

$$R : X \times Y \rightarrow [0,1]$$
$$S : X \times Y \rightarrow [0,1]$$

عندئذٍ نعرف اجتماع العلاقتين R و S كما يلي :

$$(R \cup S)(u,v) = \mathrm{Max}\{R(u,v), S(u,v)\}$$

٣) **تركيب علاقتين ترجيحيتين:** لتكن X و Y و Z ثلاث مجموعات و لتكن A و B علاقتين ترجيحيتين معرفتين كما يلي :

$$A : X \times Y \rightarrow [0,1]$$
$$B : Y \times Z \rightarrow [0,1]$$

عندئذٍ نعرف تركيب العلاقتين A و B و نرمز له بـ$A \circ B$ كما يلي :

$$A \circ B : X \times Z \rightarrow [0,1]$$

بحيث كل عنصر من $A \circ B$ يمكن حسابه كالتالي :

$$Max\left[Min\left(a_{ik}, b_{kj}\right)\right], \forall k \in |Y|, \forall i \in |X|, \forall j \in |Z|$$

مثال : لتكن لدينا العلاقة الترجيحية R ، والتي تمثل أن x يعتبر أكبر من y و لتكن لدينا العلاقة الترجيحية S ، والتي تمثل أن x قريب جداً من y حيث :

$$R : X \times Y \to [0,1] \;, \qquad S : X \times Y \to [0,1]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \text{ و } S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.9 & 0,6 \\ 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

أوجد $R \cup S$, $R \cap S$

الحل :

لنمثل العلاقة $R \cap S$ التي تعبر أن x أكبر من y **و** قريب جداً منه:

$$R \cap S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

لنمثل العلاقة $R \cup S$ التي تعبر أن x أكبر من y **أو** قريب جداً منه:

$$R \cup S = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.9 & 0.7 \\ 0.9 & 0.8 & 0.5 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$$

مثال : لتكن لدينا

$$R : X \times Y \to [0,1] \,, \qquad S : Y \times Z \to [0,1]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \text{ و } S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

أوجد $R \circ S$ حيث :

$$R \circ S : X \times Z \to [0,1]$$

الحل:

$$R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$Max[Min(0.8,0.4), Min(0.1,0), Min(0.1,0.9), Min(0.7,0.6)] = 0.6$$

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$$

بالامتحان يُطلب كتابة طريقة عنصرين فقط من المصفوفة أما بقية العناصر فنحسبها ذهنياً

انتهت المحاضرة العاشرة بفضل المولى عز وجل