محاضرة الثانية عشر

مثال: احتمال كشف رادار لطائرة معادية هو 0,9 إذا كان لدينا خمسة أجهزة رادار تعمل كل منها مستقلاً عن ~~الجهـ~~ الباقية.

1. احسب احتمال ظهور الطائرة المعادية على 4 شاشات منها

الحل: هنا احتمال ظهور أو عدم ظهور إذا كان X متغير عشوائي يدل على عدد الأجهزة التي تظهر على شاشاتها طائرة المعادية عندها يكون لـ X التوزيع الحداني بالوسيطين

$$f_X(x) = P(X=x) = \frac{5!}{x!\,(5-x)!}(0{,}9)^x(0{,}1)^{5-x} \qquad p=0{,}9 \;,\; n=5$$

$$f_X(4) = P(X=4) = \frac{5!}{4!\,1!}(0{,}9)^4(0{,}1)^1 = 0{,}328$$

2. احسب احتمال ظهور طائرة معادية في سمائنا

AL MARJI

$$P(X \geq 1) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$= f_X(1)+f_X(2)+f_X(3)+f_X(4)+f_X(5) = 1-P(X<1) = 1-P(X=0)$$
$$= 1-\frac{5!}{0!\,5!}(0{,}9)^0(0{,}1)^5 = 0{,}99991$$

③ اوجد القيمة الأكثر احتمالاً عند هذه القيمة

الحل: ان القيمة الأكثر احتمالاً تقع في المجال $[nP-q \,,\, (n+1)P]$

$$nP-q = (5)(0{,}9)-0{,}1 = 4{,}4 \quad , \quad (n+1)P = 6(0{,}9) = 5{,}4$$

$$P(X=5) = \frac{5!}{5!\,0!}(0{,}9)^5(0{,}1)^0 = 0{,}59$$ اذاً القيمة الأكثر احتمالاً هي 5

مثال 2: كم مرة يجب على الفتاة أن تطلق نقود غير متزنة حتى تحصل على صورة باحتمال أكبر من 0,9 حيث ان احتمال ظهور الصورة هو 0,4

الحل: المطلوب هو n ، نهتم بعدد التكرار القيمة الأولى دالة ثنائية
$X \sim Bin(n, 0{,}4)$ اذ ان الفتاة تطلق نقود واحدة هي تجربة برنولي لان
لها نتيجتين وحيث $P=0{,}4 \,,\, n=?$

$$f_X(x) = P(X=x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}(0{,}4)^x(0{,}6)^{n-x}$$

$$P(X \geq 1) > 0{,}9 \Rightarrow 1-P(X=0) > 0{,}9 \Rightarrow P(X=0) < 0{,}1$$

$$\frac{n!}{0!(n-0)!}(0{,}4)^0(0{,}6)^n < 0{,}1 \Rightarrow n \ln 0{,}6 < \ln 0{,}1$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}1)}{\underbrace{\ln(0{,}6)}_{\text{سالب}}} \simeq 4{,}6$$

اذاً $n \geq 5$

مثال 3: اذا أمكن ان عدد المواليد الذكور يساوي تقريباً لعدد المواليد الإناث لمجتمع سكاني معين. أوجد النسبة المئوية للأسر ذوات 6 أطفال التي تتضمن ما يلي

① عدد الأطفال الذكور يساوي عدد الإناث.

Subject: Date : / /

الحل : إذا افترضنا أن X يدل على عدد الذكور في العائلة فإن لـ X توزيع حداني بالوسيطين

$f_X(x) = P(X=x) = \frac{6!}{x!(6-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}$ $n=6$, $P=\frac{1}{2}$

$x=3 \Rightarrow P(X=3) = \frac{6!}{3!\,3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.3125$ أي $31{,}25\%$

2) جميع الأطفال من جنس واحد

A احتمال كل أطفال ذكور و B احتمال كل أطفال أناث

لكن A و B مستقلين $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(X=0) + P(X=6) = \frac{6!}{0!(6-0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \frac{6!}{6!(6-6)!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0$

$= 0{,}03125$

ومنه النسبة المئوية للأسر التي كل أطفالها من جنس واحد هي $3{,}12\%$

تمرين وظيفة : أحد أعمال المصابيح ينتج 1% مصابيح عاطلة عن العمل ، اشترت إحدى المؤسسات 4000 مصباح . أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري لعدد المصابيح العاطلة

مساعدة الحل : احتمال أن يكون المصباح عاطل عن العمل $P = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$E(X) = nP = 4000 \times 0{,}01 = 40$

$V(X) = nPq = 4000 \times 0{,}01 \times \frac{99}{100} = 39{,}6$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 6{,}29$

وظيفة هاااام : إذا كانت 5% من التفاح المخزن تالف وأخذنا عشوائياً صندوقاً يحوي 100 تفاحة فما هو احتمال :

1) أن يخلو الصندوق من التفاح التالف

2) أن يحتوي على تفاحتين تالفتين فقط

AL MARJI

Subject: Date : / /

③ أن يحتوي على عدد ما بين 1 إلى 5 تفاحات تالفة

④ ما هي القيمة الأكثر احتمالاً لعدد التفاحات التالفة في الصندوق

ملاحظات: ① عندما تكون الـ n كبيرة و P صغيرة تحول الحداني إلى بواسون ② دالة الاحتمال لبرنولي هي $f_X(x) = p^x q^{1-x}$ $n=1$ البرنولي هي الحداني عندما يكون $n=1$

انتهت المحاضرة الثانية على خير

محاضرة ثالثة على خير

إذا أمكن افتراض أن عدد المواليد الذكور يساوي عدد المواليد الإناث أوجد النسبة المئوية للعائلات ذي 6 أطفال ١) عدد الذكور يساوي عدد الإناث.

الحل: بما أن احتمال أن المولود ذكر يساوي احتمال أن يكون المولود أنثى $P = \frac{1}{2}$ و $q = \frac{1}{2}$ إذا افترضنا أن X متحول عشوائي يدل على عدد الأطفال الذكور في الأسرة ومكونة من 6 أطفال فإن لـ X توزيع حداني بالوسيطين $n = 6$ و $P = \frac{1}{2}$ ، لـ X دالة الاحتمال

$$P(X=x) = f_X(x) = \frac{6!}{x!\,(6-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}$$

$x = 0, 1, \ldots, 6$ ؛

$$1)\ P(X=3) = f_X(3) = \frac{6!}{3!\ 3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.3125$$

فتكون النسبة المئوية للأسر التي يكون فيها عدد الذكور يساوي عدد الإناث

$$0.3125 \times \frac{100}{100} = 31.25\,\%$$

2) ما احتمال أن يكون المواليد من نوع واحد

A احتمال كل المواليد ذكور و B احتمال كل المواليد إناث

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Subject: Date : / /

$P(X=6)+P(X=0)=\frac{6!}{6!\,0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+\frac{6!}{0!\,6!}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=0{,}03125$

و النسبة المئوية للأسر الذي جميع أطفالها من نوع واحد 3.125%

تمرين : اذا كان احتمال أن يعاني شخص من رد فعل سيء عند حقنه بمصل معين هو $\frac{1}{1000}$ من بين 2000 شخص سيحقنون بالمصل أوجد احتمال

1) ثلاث أشخاص سيعانون من رد فعل سيء

يتم التقريب التوزيع الحداني إلى التوزيع البوسوني اذا كان $np<5$

$np=2000\times\frac{1}{1000}=2<5$ يمكن التحويل إلى بوسوني

- إذا فرضنا أن X عدد الأشخاص الذين سيعانون من رد فعل سيء فإن X له التوزيع الحداني (الثنائي) بالوسيطين $n=2000$ و $P=\frac{1}{1000}$ فيكون لـ X دالة الاحتمال التالية

$P(X=x)=f_X(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{1}{1000}\right)^{n}\left(\frac{999}{1000}\right)^{n-x}$

1) $f_X(3)=\frac{2000!}{3!\,(1997)!}\left(\frac{1}{1000}\right)^{3}\left(\frac{999}{1000}\right)^{1997}=0.1805$

2) احتمال أن يكون هناك شخصين أو أكثر سيعانيان من رد فعل سيء

$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$

$=1-\left[C_0^{2000}\left(\frac{1}{1000}\right)^{0}\left(\frac{999}{1000}\right)^{2000}+C_1^{2000}\left(\frac{1}{1000}\right)^{1}\left(\frac{999}{1000}\right)^{1999}\right]$

$=0.5941$

إعادة حل التمرين بالتوزيع البوسوني

$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda}\ ;\ x=0,1,\ldots\ ,\ \lambda=nP$

1) $f_X(3)=P(X=3)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0.188804$

2) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$

$1-\left[e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}\right)\right]=0.594$

AL MARJI

Subject:

Date : / /

تمرين: إذا كان معدل عدد الحوادث المرورية في مدينة معينة خلال يوم هو 3 حوادث 1) ما احتمال وقوع حادث واحد فقط خلال اليوم؟

الحل: لا يمكن تحديد n أي عدد السيارات المارة في المدينة لذلك نلجأ لتوزيع البواسون بالوسيط $\lambda = 3$

إن P احتمال فهو دائماً أصغر من الواحد لكن λ وسيط فيمكن أن يكون أكبر من 1

1) $f_X(x) = P(X=x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-x}$

$$P(X=1) = \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 0.15$$

2) ما احتمال وقوع 3 حوادث على الأكثر

$$P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= e^{-3}\left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right) = 0.65$$

تمرين: يحوي صندوق ثلاث كرات حمراء وسبع كرات بيضاء، نسحب كرة من الصندوق ونعيدها إليه بعد تسجيل لونها ونكرر العملية 10 مرات والمطلوب

1) أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الدال على عدد الكرات الحمراء خلال التجربة؛

الحل: بما أن لتجربة السحب نتيجتان (إما حمراء أو بيضاء)

لنفرض X متحول عشوائي دال على عدد الكرات الحمراء المسحوبة خلال تكرار التجربة 10 مرات، إن X يتبع التوزيع الحداني بالوسيطين n, P

$$f_X(x) = P(X=x) = \frac{10!}{x!\,(10-x)!} \left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{10-x}$$

2) أوجد احتمال أن يكون عدد الكرات المسحوبة 2 على الأقل

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$1 - \left[C_0^{10}\left(\frac{3}{10}\right)^0\left(\frac{7}{10}\right)^{10} + C_1^{10}\left(\frac{3}{10}\right)^1\left(\frac{7}{10}\right)^9\right] = 0.852$$

3) أوجد احتمال أن يكون عدد الكرات المسحوبة 3 على الأكثر

Subject: Date: / /

$P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0.6478$

4) استخدم التوزيع البواسوني بالإجابة عن الطلبات السابقة

$f_X(x) = P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$; $\lambda = n \cdot P = 10 \cdot \frac{3}{10} = 3 < 5$

; $x = 0, 1, \ldots, 10$

1) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$= 1 - e^{-3}\left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!}\right] = 0,8$

2) $P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$= e^{-3}\left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right] = 0,65$

أنتهت المحاضرة الثالثة علمي

محاضرة رابعة علمي

تمرين: تقع حوادث الاصطدام على الطرق في منطقة معينة بمعدل حادث واحد كل يومين

1) احسب الاحتمالات الموافقة 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 حوادث اصطدام في الأسبوع في تلك المنطقة.

الحل: X عدد الحوادث في منطقة معينة في كل يومين، لا يمكن تحديد قيمة n لذلك نستخدم التوزيع البواسوني $X \sim Poiss(\lambda)$ حيث $\lambda = 1$

هنا الـ λ لكل يومين وطلب في أسبوع لذلك نقوم بتغيير λ

$\lambda = 0,5 \times 7 = 3,5$ ليكن Y متحول عشوائي يدل على عدد الحوادث في أسبوع

$Y \sim Poiss(\lambda)$ حيث $\lambda = 3,5$ ، يكون لـ Y كثافة احتمالية معينة

$f_Y(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$; $x = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda = 3,5$

$f_Y(0) = e^{-3,5}\frac{(3,5)^0}{0!} = 0,030$, $f_Y(1) = 0.106$

$f_Y(2) = 0.185$, $f_Y(3) = 0,216$, $f_Y(4) = 0.189$

$f_Y(5) = 0.132$, $f_Y(6) = 0.077$

2) "ما هو عدد الاصطدامات الأسبوعية الأكثر احتمالاً"

AL MARJI

الأكثر احتمالاً هو 3 حوادث
من الطالب الأول نجد أن عدد الحوادث

③ كم يوم في الأسبوع نتوقع أن يمر بدون اصطدامات ؟

$X \sim Bin(n,P)$ $n=7$; X عدد الأيام التي تمر بدون حوادث

$$f_X(x) = C(n,x)\, P^x\, q^{n-x}$$

احتمال أن يمر يوم بدون حادث هو $\lambda = 0.5$ و Z عدد حوادث في اليوم وهو يتبع التوزيع البواسوني

بما أننا نهتم بعدد الأيام التي تمر بدون حوادث اصطدام يكون لـ X توزيع ثنائي بالوسيط $n=7$ هو عدد الأيام و P احتمال أن يمر يوم واحد بدون اصطدام

ونفرض أن Z متحول عشوائي يدل على عدد الحوادث في اليوم فيكون له توزيع بواسوني بالوسيط $\lambda = \frac{1}{2}$ واحتمال أن يمر يوم ما بدون اصطدام هو

$$f_Z(0) = P = 0.607$$

$$E(X) = nP = 7 \times 0.607 = 4.25$$

وهو متوسط الأيام التي تمر بدون حادث

تمرين: ليكن X متحول عشوائي كثافته الاحتمالية

$$\boxed{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{3} \ ; & 1 \le x \le 4 \\ 0 \ ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$
$$= P(X=x)$$

1) عين توقع X وتباينه.

نلاحظ أن لـ X توزيع منتظم على المجال $[1,4]$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4-1)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

2) عين دالة التوزيع الاحتمالي $F(X)$

$$\boxed{F(t)} = \begin{cases} 0 & ; \ t < a = 1 \\ \dfrac{t-a}{b-a} = \dfrac{t-1}{3} & ; \ a \le t \le b \\ 1 & ; \ t > b = 4 \end{cases}$$

$P(X \le t)$

③ أوجد الاحتمالات الآتية $P(0<X<2)$, $P(X>2)$, $P(X<3)$

$* \ P(X<3) = F(3) = \dfrac{3-1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$* \ P(X>2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) \quad 1 - \dfrac{2-1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$* \ P(0<X<2) = P(X<2) - P(X<0)$

$= F(2) - F(0) = \dfrac{2-1}{3} - 0 = \dfrac{1}{3}$

$* \ P(|X| \le \dfrac{2}{3}) = P(-\dfrac{2}{3} \le X \le \dfrac{3}{2})$

$= F(\dfrac{3}{2})^{3} - F(-\dfrac{3}{2}) = \dfrac{\frac{3}{2}-1}{3} - 0 = \dfrac{1}{6}$

تمرين : إذا كان عمر صمام كهربائي (بالساعات الكثافة الاحتمالية)

$$f(x) = \begin{cases} (0.0001)\, e^{-0.0001x} & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

من دالة الكثافة نجد أن عمر الصمامات توزيع أسي بالوسيط $\lambda = 0.0001$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-0,0001x} \quad ; \ x > 0$

① أوجد العمر الوسيطي للصمام

$E = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,0001} = 10000 \, h$

② أوجد احتمال أن يعمر الصمام على الأقل 8000 ساعة

$P(X \ge 8000) = 1 - F(8000)$

$= 1 - [1 - e^{-8000(0.0001)}] = 0.449$

انتهت المحاضرة الرابعة علي