مقرر تحليل المتجهات ومبادئ الهندسة التفاضلية ع٤

نتائج:

① $\vec{grad}(f+g) = \vec{grad} f + \vec{grad} g$

② $\vec{grad}(f.g) = f\,\vec{grad} g + g.\vec{grad} f$

تباعد حقل متجهي (تعريف):

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

أي

$$\vec{f}(P,Q,R)$$

نرمز لتباعد حقل $\vec{f}$ بالرمز: $d.\nabla\vec{f} = \vec{\nabla}\vec{f}$

$$d.\nabla\vec{f} = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}$$

مثال: $\vec{f}(x.y,\ x^2-y^2,\ x^2+z^2)$ أوجد تباعد الحقل $\vec{f}$:

$$d.\nabla\vec{f} = y - 2y + 2z$$

$$= 2z - y$$

$$\vec{f} = xy\vec{i} + (x^2-y^2)\vec{j} + (x^2+z^2)\vec{k}$$

دوران حقل متجهي:

$$\vec{F}(P,Q,R) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

نرمز لدوران حقل متجهي $\vec{F}$ بـ $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}$ أو $\vec{rot}\,\vec{F}$ ويعرف بـ

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

في المثال السابق نجد

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ xy & x^2-y^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{d\,x^2+y^2}{dy} - \frac{d\,x^2-y^2}{dz} , \frac{d\,xy}{dz} - \frac{d\,x^2+y^2}{dx} , \frac{d\,x^2-y^2}{dx} - \frac{d\,xy}{dy} \right)$$

$$\vec{rot}\,\vec{F} = (0 , -2x , 2x - x)$$

تابع الكمون العددي والحقل الكموني

نتكلم عن التابع المتجهي $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z)$ أنه مشتق من تابع ام حقل كموني $\Phi(x,y,z)$ اذا كان $\vec{F} = \vec{\nabla}.\Phi$

والمطلوب لاحقاً إيجاد Φ

ملاحظة :

الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع او الحقل $\vec{F}$ مشتق من تابع كمون هو ان يكون $\vec{F}.d\vec{OM}$ هو تفاضل تاماً تابع لـ Φ اي :

$$d\Phi = \vec{F}.d\vec{OM} \Rightarrow$$

$$\Phi = \int \vec{F}.d\vec{OM}$$

ملاحظة :

الشرط اللازم والكافي لكي يكون $\vec{F}$ مشتق من تابع عددي Φ هو ان ينعدم الدوران اي :

$$\vec{rot}.\vec{F} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{dR}{dy} = \frac{dQ}{dz},$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy},$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz}.$$

- بين ان الحقل $\vec{F}$ مشتق من تابع كمون Φ واوجد هذا التابع

$$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + z\vec{j} + (y+2z)\vec{k}$$

حتى يكون $\vec{F}$ مشتق من تابع كمون يجب ان يكون $\vec{rot}\,\vec{F} = 0$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dQ}{dz} \Rightarrow 1 = 1$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz} \Rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy} \Rightarrow 0 = 0$$

اذا $\vec{F}$ مشتق من تابع كمون Φ نحسبه بالعلاقة

$$\Phi = \int \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$$\Phi = \int (x\vec{i} + z\vec{j} + (y+2z)\vec{k})(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= \int x\,dx + \int z\,dy + \int (y+2z)\,dz$$

$$= \frac{x^2}{2} + c_1 + zy + c_2 + yz + z^2 + c_3$$

$$\Phi = \frac{x^2}{2} + 2zy + z^2 + c$$

الطريقة الثانية:

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\,\Phi$$

1) $\dfrac{d\phi}{dx} = x \Longleftarrow \dfrac{d\phi}{dx} = P$

2) $\dfrac{d\phi}{dy} = z \Longleftarrow \dfrac{d\phi}{dy} = Q$

3) $\dfrac{d\phi}{dz} = y + 2z \Longleftarrow \dfrac{d\phi}{dz} = R$

من 1)

$$d\phi = x \cdot dx$$
$$\phi = \int x \cdot dx$$
$$\phi = \frac{x^2}{2} + g(y,z)$$

نشتق بالنسبة لـ x ومقدار g

نشتق بالنسبة لـ y

من 2)

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{dg(y,z)}{dy}$$
$$z = \frac{dg(y,z)}{dy}$$
$$dg(y,z) = z \cdot dy$$
$$g(y,z) = \int z \cdot dy = zy + h(z)$$

$$\star\ \phi = \frac{x^2}{2} + zy + h(z)$$

نشتق بالنسبة لـ z

من ٣)

$$\frac{d\phi}{dz} = y + \frac{dh(z)}{dz}$$
$$\cancel{y} + 2z = \cancel{y} + \frac{dh(z)}{d(z)}$$
$$h(z) = \int 2z \cdot dz$$
$$h(z) = z^2 + c$$
$$\phi = \frac{x^2}{2} + zy + z^2 + c \quad \star \text{ نعوض في}$$

سطوح الكمون (السوية)

وجدنا ان $\phi = \int \vec{F}\, d\vec{oM}$

$$\phi(x,y,z) = \phi(x,y,z) + c$$

ان اختلاف قيم c تعطي في كل مرة سطح شبيه بسطح السوية عند تلك ا

في المثال السابق

$$\phi = \frac{x^2}{y} + zy + z^2 + c$$

عند النقطة $M(1,0,1)$ يكون

$$c = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$\Longleftarrow$

سطح السوية هو $\phi = \frac{x^2}{2} + zy + z^2 + \frac{3}{2}$

مثال

بين ان $\vec{F}$ مشتق من تابع كمون واوجد كمونه

1) $\vec{F} = 2xe^{-y}\,\vec{i} + (\cos z - x^2 e^{-y})\,\vec{j} + (-y\sin z)\,\vec{k}$

2) $\vec{F} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}$

3) $\vec{F} = (2xz^3 + 6y)\,\vec{i} + (6x - 2yz)\,\vec{j} + (3x^2z^2 - y^2)\,\vec{k}$

4) $\vec{F} = \frac{1}{y}\,\vec{i} - \frac{x}{y^2}\,\vec{j}$

خطوط الحقل المتجهي (منحنيات حقل متجهي)

لنفرض $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$

حقلاً متجهياً

نعرف: منحنيات او خطوط الحقل $\vec{F}$ المتجهي بأنها المنحنيات التي يكون

المماس فيها في اي نقطة منطبقاً على خط الحقل في تلك النقطة

ويعرف بالعلاقة: $\vec{F} \wedge d\vec{oM} = \vec{0}$

وتحليلياً يعين بالمعادلات التفاضلية

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

ونفرض ان الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو

مستقلين $\{ F(x,y,z)=c_2 \ , \ F(x,y,z)=c_1$
عندئذ هذا الحل يمثل مجموعة سطوح في الفضاء، تقاطعها هو
خطوط الحقل $\vec{F}$

مثال: أوجد خطوط الحقل $\vec{F}$ حيث

$$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

$$P = yz \ , \ Q = xz \ , \ R = x.y$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$$

(1) (2) (3)

بأخذ (1) (2)

$$xz\,dx = yz\,dy$$

نكامل
$$c_1 + \frac{x^2}{2}z = \frac{y^2}{2}z + c_2$$
$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_3$$

$$f : x^2 - y^2 = c$$

بنفس الطريقة نجد

$$g : x^2 - z^2 = c$$

التكاملات المنحنية:

تعريف: نفرض $\vec{OM}$ شعاع الموضع

$$\vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

m نقطة من المنحني C الموجه يصل بين نقطتين $A(t_0)$ ، $B(t_1)$ ونفرض $\vec{F}$
حقل شعاعي $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j}$
$+ R(x,y,z)\vec{k}$

نعرف العمل المنجز للحقل الشعاعي $\vec{F}$ على طول المنحني C الموجه من النقطة A إلى B على أنه
التكامل المنحني الخطي المعرف بالعلاقة

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{OM} = \int_C \vec{F}\, d\vec{OM}$$

ملاحظة:
إذا كان $\vec{F}$ مشتق من تابع ϕ أي $\vec{F} = \vec{grad}\,\phi$ عندئذ يكون التكامل:

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{OM} = \int_A^B d\phi = [\phi]_A^B = \phi[B] - \phi[A]$$

إذا كان C منحني مغلق تنعدم قيمة التكامل (الصفر) بين A و B

إذا كان C منحني مغلق نكتب

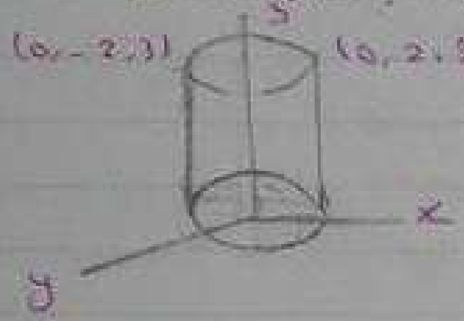
$$W = \oint_A^B \vec{F}\, d\vec{OM} = \oint_C \vec{F}\, d\vec{OM}$$

مثال: احسب عمل الحقل المتجهي $\vec{F}$ على المنحني C حيث

$$\vec{F} = (xy)\vec{i} + (x^2 + z)\vec{j} + (y + z^2)\vec{k}$$

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

وذلك في الاتجاه الموجب من النقطة $A(0,2,3)$ إلى $B(0,-2,3)$



معادلة الدائرة:

$$x = 2\cos t$$
$$y = 2\sin t$$

من أجل A $\begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = 1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$

من أجل B $\begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = -1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{3\pi}{2}$

ملاحظة:
نحصل على التكامل بعد كتابة التابع المكامل بدلالة وسيط واحد مستقل حيث نحصل عليه من معادلات المنحني

بالتالي $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{OM}$$

$$d\vec{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$d\vec{OM} = -2\sin t\, dt\,\vec{i} + 2\cos t\, dt\,\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{F} = (4\sin t\cos t)\vec{i} + (4\cos^2 t + 3)\vec{j} + (2\sin t + 9)\vec{k}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{OM} = -8\sin^2 t\cos t.dt + 8\cos^3 t + 6\cos t.dt$$

$$= 2[-4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 3]\cos t\, dt$$

$$= 2[-4\sin^2 t + 4 - 4\sin^2 T + 3]\cos t\, dt$$

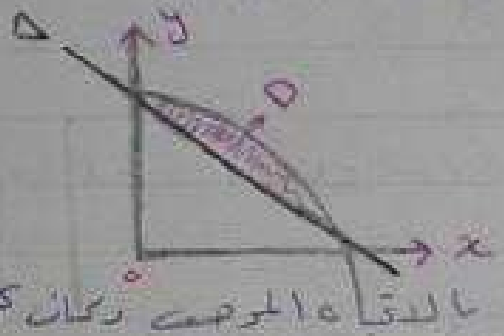
$$= 2\left[-8\sin^2 T + 7\right] d(\sin t)$$

$$W = 2\int \left(-8\sin^2 T + 7\right) d(\sin t)$$

$$= 2\left[-\frac{8}{3}\sin^3 t + 7\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-52}{3}$$

$$\vec{F} = (5xy - 6x^2)\vec{i} + (2y - 4x)\vec{j}$$

المنحني $C : y = x^2$ من $A(1,1)$ إلى $B(2,8)$



مبرهنة غرين في المستوي

إذا كان لدينا منطقة مغلقة في المستوي Oxy محدودة بمنحنٍ C مغلق، موجه بالاتجاه الموجب وكان كل من مركبات الحقل الشعاعي $\vec{F}(Q,P)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق داخل المنطقة D وعلى محيطها المنحني عندئذٍ تحقق العلاقة التالية

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \oint\int_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\,dy$$

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

مثال: استخدم علاقة غرين في المستوي لإيجاد التكامل المنحني:

$W = \oint [(xy + y^2)\,dx + x^2\,dy]$ حيث C منحنٍ مغلق موجه بالاتجاه الموجب ومحيط بالمنطقة D المحدودة بالمنحني:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$$

الحل:

$$P = xy + y^2 \quad , \quad \frac{dP}{dy} = x + 2y$$

$$Q = x^2 \quad , \quad \frac{dQ}{dx} = 2x$$

$$W = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (2x - x - 2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x - 2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - 2yx\right]_{x^2}^{x} dy$$

$$= \int_0^1 [(x - 2yx) - (\frac{x^4}{2} - yx^2)]\, dy$$

$$= [\frac{x^2}{2} y - xy^2 - \frac{x^4}{2} y - \frac{y^2}{2} x^2]_0^1$$

تمارين: $w = \oint (y - \sin x)\, dx + \cos x\, dy$

حيث C محيط المثلث $(0,0) , A(\frac{\pi}{2}, 0) , B(\frac{\pi}{2}, 1)$

اعداد جيهان مصطفى

فريق سيرياماث .