ملاحظات :

- A قطور $\Leftrightarrow$ A لا تماثلة ذاتية
- الحدودية المميزة تكتب على شكل جداء عوامل قطعة على شكل $(X-\lambda)^{\alpha}$ $\Leftarrow$ A قطور
- الحدودية المميزة تكتب على شكل جداء عوامل درجة الأولى (قطعة أو غير قطعة) $\not\Leftarrow$ A ثلوثة.
- A قطور $\not\Leftarrow$ A ثلوثة
- A ليست ثلوثة $\Rightarrow$ A ليست قطورة"

التمارين

1) نعتبر $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$P_A(X) = (X-1)(X+1)(X+2)$

عندئذ A ثلوثة لأن الحدودية المميزة تكتب على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى

$\Rightarrow P_A(X) = (X-1)(X-1)(X+1)(X+2)$

2) نعتبر $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_2)$

$P_A(X) = (X^2+1)(X-1)$

لدينا $\mathbb{F}_2 = \mathbb{R}$ تكون A غير ثلوثة

لأنه لا يمكن كتابة الحدودية المميزة على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى

$\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{R}$ تكون ثلوثة.

لدينا $P_A(X) = (X+1)(X-1)(X-1)$

(٥ ليكن $L: R^3 \to R^3$ التحويل الخطي،

$L(x, y, z) = (x + y, -2x - y, 3z)$

حل التمرين ـ حل المطلوب ؟

نعلم ان القاعدة المتعارفة:

$E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

$L(e_1) = 1e_1 - 2e_2 + 0e_3$

$L(e_2) = 1e_1 - 1e_2 + 0e_3$

$L(e_3) = 0e_1 + 0e_2 + 3e_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_L(x) = P_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 2 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$= (x-3)[(x-1)(x+1) + 2]$

$= (x-3)(x^2 - 1 + 2)$

$= (x-3)(x^2 + 1)$

Scanned by CamScanner

لا يمكن كتابة الحدودية المميزة على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى $\Leftarrow$ L ليس ثلوث $\Leftarrow$ L ليس تظور

* نعرف « هاميلتون كايلي »

ليكن $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي:

$$L(x,y,z) = (x-y+z, x+3y-z, 2z)$$

1- أوجد الحدودية المميزة والأشعة المميزة للمؤثر L

2- أوجد القيم الذاتية ثم حدد المؤثر L قابل للتقطير

3- تأكد مما إذا كان L تظور، ثلوث، كم نلت بالنسبة لـ A أو عبر عنها بـ P_A

الحل:

$$L(e_1) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 \quad (1$$
$$L(e_2) = -1e_1 + 3e_2 + 0e_3$$
$$L(e_3) = 1e_1 - 1e_2 + 2e_3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & +1 & -1 \\ -1 & x-3 & +1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$P_A(x) = P_L(x) = (x-2)[(x-1)(x-3)+1]$$
$$= (x-2)(x^2-4x+4)$$
$$= (x-2)(x-2)^2 = (x-2)^3$$

$$q_A(x) = (x-2)^r \quad ; r \in \{1,2,3\}$$

$r = 1$

$$q_A(x) = (x-2)$$
$$= A - 2I$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$r = 2$

$$q_A(x) = (x-2)^2$$
$$= (A-2I)^2$$

Scanned by CamScanner

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \chi_A(x) = (x-2)^2$$

2) القيم الذاتية هي اصفار الحدودية المميزة

$$P_A(x) = (x-2)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

الشعاع الذاتي $v \in \mathbb{R}^3 \quad v \neq 0$

$$L(v) = v\lambda v$$

$$L(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$$

$$\Rightarrow x - y + z = \lambda x$$

$$x + 3y - z = \lambda y$$

$$2z = \lambda z \Rightarrow 1-$$

$$\Rightarrow 11.\lambda x - y + z = 0$$

$$x + (3-\lambda)y - z = 0$$

$$(2-\lambda)z = 0$$

Scanned by CamScanner

$\lambda = 2$

$$-x - y + z = 0 \quad \cdots (1)$$
$$x + y - z = 0 \quad \cdots (2)$$
$$0z = 0 \quad \cdots (3)$$

من (1) و (2) نجد أن $z = x + y$

$$v = (x, y, x+y) \; ; \; x, y \in \mathbb{R}$$

(3) * إيجاد قاعدة ذاتية

* نفرض $x = 0$, $y = 1$

$\Rightarrow v_1 = (0, 1, 1)$

* نفرض $x = 1$, $y = 0$

$\Rightarrow v_2 = (1, 0, 1)$

* وأي شعاع ثالث يكون مرتبط خطياً

$\Rightarrow B = \{v_1 = (0,1,1) \; , \; v_2 = (1,0,1)\}$

لا تشكل قاعدة ذاتية لـ V.

بما أن بعد V قاعدة ذاتية $= 2$ ليس متطوراً $= 3$

لأنه لا توجد الحدودية المميزة كتبت على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى

* لتثليث f نضيف شعاع ثالث إلى B بحيث تكون B مستقلة خطياً

« نأخذ شعاع من القاعدة القانونية »

Scanned by CamScanner

مثلاً لنأخذ $v_3 = (1,0,0) \Leftarrow v_3 = e_1$

لنتحقق من كون β مستقلة خطياً

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \neq 0$$

* نوجد مصفوفة L بالنسبة للقاعدة β

بما أنه متشاع ذاتي $L(v_i) = \lambda v$

* $L(v_1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

$= 2v_1 + 0v_2 + 0v_3$

* $L(v_2) = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3$

$L(v_3)$ بما أن المتشاع ذاتي

$\Rightarrow L(1,0,0) = (1,1,0)$

$= \alpha_1(0,1,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,0,0)$

$= (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2)$

$\alpha_1 = 1 \quad , \alpha_2 = -1 \quad \alpha_3 = 2$

* $L(v_3) = 1v_1 - 1v_2 + 2v_3$

$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة مثلثية دنيا

< انتهت المحاضرة >

نأمل أن تكون هذه المحاضرة قد أفادتكم

Scanned by CamScanner