بين أنه إذا كانت $\mathcal{A}$ جبراً تاماً يحوي صف المجالات $\mathcal{E}$ (السابق ذكره) فإنه يحوي كلاً من المجالات

$B_1 =]0,10[$, $B_2 = [a, +\infty[$, $B_3 =]0, +\infty[$, $B_4 = [0,10]$, $\mathbb{Z}$

$B_1 =]0,10[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 10[\in \mathcal{A}$ عبارة $\mathcal{A}$ جبراً تاماً فإنه مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود.

$B_2 = [0, +\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, +\infty[\in \mathcal{A}$.

$B_3 =]0, +\infty[= \bigcup_{n=1} [\frac{1}{n}, n[\in \mathcal{A}$

$B_4 = [0,10] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 10+\frac{1}{n}[\in \mathcal{A}$

$\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\} = \ldots \{-2\} \cup \{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \ldots$

$\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a, a+\frac{1}{n}[= [a,a]$ وإن كل مجموعة وحيدة العنصر ماهي إلا

مجموعة بما أن $\mathbb{Z}$ تكتب على شكل اتحاد معدود من عناصر $\mathcal{A}$

$\Leftarrow \mathbb{Z} \in \mathcal{A}$

المحاضرة الثامنة: الأربعاء / ٥ / ٤ / ٢٠١٢

حول تطبيقات القياس في الاحتمالات:

المتغير العشوائي: ليكن لدينا (Ω, ε, P) فضاء احتمالي حيث

Ω: هي مجموعة النتائج لتجربة عشوائية الممكنة.

ε: جبر الأحداث (جبر تام)

P: دالة احتمال (قياس).

الاحتمال هو تابع قيوس كما أن الصورة العكسية لأي مجال هو حدث.

ونعرف بالدالة $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\omega \longmapsto X(\omega)$

ويتمتع بالصفة أن الصورة العكسية لأي مجال هي حدث أي نقول:

/ /

$\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$: $[a \leq X \leq b]$ أو $[a < X \leq b]$ أو $[a \leq X < \infty]$

جميعها أحداث أو نعرفه بالشكل:

$\{\omega : a \leq X(\omega) \leq b\}$
$\{\omega : a < X(\omega) \leq b\}$
$\{\omega : a \leq X(\omega)\}$

أي أن الصورة العكسية لأي مجال هي حدث.

وسنهتم بصورة خاصة بالحدث $[X < a]$ على مجموعة الأعداد الحقيقية.

والمهم أيضاً هو دالة احتمال هذا الحدث وكذلك الأخير ناسمي الدالة

$F_X(\alpha) = P(\{\omega : X(\omega) < \alpha\})$ ويكون تابع لـ α.

بدالة التوزيع الاحتمالي.

وإذا كان هذا التابع قابل للاشتقاق فإن المشتق يعطي دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي

فإذا كان التابع متقطع نقول أنه التوزيع العشوائي متقطع وكذلك إذا كان مستمراً فإننا نقول تابع توزيع مستمر وإذا كان مستمراً فإن المتغير العشوائي يكون مستمر.

تذكرة: إذا كان $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ فضاء احتمالي

لأي لدينا مجموعة غير خالية تمثل مجموعة النتائج لتجربة عشوائية تحت دعم ممكنة طاليم معين).

وإن دالة الاحتمال تتميز بالخواص:

[1] $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$

[2] $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

[3] $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$. القاعدة الذهبية.

إن هذا الشرط له عكس صحيح.

ونقول: أما إذا كان لدينا فضاء قابل للعد أو غير قابل للعد فإننا نكتب:

* إذا كان لدينا متتالية من الأحداث التي تنتمي إلى $\mathcal{E}$ فإن:

/ /

$A_1, \dots, A_n, \dots \subset \mathcal{F} \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (شرط-σ)

لا يعني تحريم الإتحاد المعدود.

حيث إن (A_i) أحداث غير متنافية لأنه لو كانت متنافية لأصبحت مساواة (معكوس المجموع)

** $\text{if } A_n \nearrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow P(A_n) \nearrow P(A)$

*** $\text{if } A_n \searrow A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow P(A_n) \searrow P(A)$

لانتنسى أنه إذا كان $A_1 \subseteq \Omega$

فإن $P(A_1) < \infty$

كما نعلم أن أي احتمال هو أصغر من الواحد $\forall A_1 \subseteq \Omega \Rightarrow P(A_1) \leq 1$

$\boxed{5}$ $\text{if } A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

ملاحظة: إن ~~ضخ~~ متتالية الأحداث تتقارب إلى نفس احتمال النهاية. (ذي يعني استمرار دالة الاحتمال)

* إن كل احتمال يولد قياساً خارجياً.

ليكن $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ فضاءً احتمالياً و ليكن لدينا احتمالاً $\mathbb{P} : \mathcal{F} \subseteq P(\Omega) \to \mathbb{R}$

معرفاً على جبر الأحداث (هو جزء من مجموعة أجزاء Ω أو يساويها).

نعرف القياس الخارجي بالشكل: $\mathbb{P}^* = \inf \left\{ \sum_{1}^{\infty} P(A_n) : A_n \in \mathcal{F},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq E \right\}$

(اجتماع هذه الأحداث يغطي E)

خواص الاحتمال الخارجي:

1) $\mathbb{P}^*(E) = \mathbb{P}(E)$ if $E \in \mathcal{F}$. لأن $\mathbb{P}^*$ ممدد $\mathbb{P}$.

2) $\mathbb{P}^*(\phi) = 0$

3) $\mathbb{P}^*(\Omega) = 1$

4) $\mathbb{P}^*(A) \leq \mathbb{P}^*(B)$ if $A \subseteq B$.

5) $\mathbb{P}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^*(A_n)$

/ /

الحوادث المهملة: هي احداث شبه مستحيلة في مفهوم الاحتمال.

كل قياس خارجي يولد جبر تام $\Rightarrow$ الاحتمال يولد جبر تام.

المتغير العشوائي: إذا كان لدينا قياس خارجي يتمتع

لتكن لدينا

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto X(\omega).$$

وكانت الصورة العكسية لأي مجال من $\mathbb{R}$ حدثاً علينا حسابه.

وإذا رمزنا لـ X قيمة أصغر من α $[X<\alpha]$ أو نكتب

$$[X<\alpha] = [X \in]-\infty,\alpha[\,]$$

ثم أخذنا احتمال الطرفين:

$$F_X(\alpha) = P[X<\alpha] = P[X \in]-\infty,\alpha[\,]$$

فإن التابع $F_X(\alpha)$ المتغير تابع التوزيع الاحتمالي . Random variable.

خواص تابع التوزيع الاحتمالي:

$$X : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : [X<\alpha] \in \mathcal{E}.$$

$$F_X(\alpha) = P[X<\alpha].$$

① $F_X(-\infty) = 0$

② $F_X(+\infty) = 0$

③ $F_X(\alpha) \le F_X(\beta)$ if $\alpha \le \beta$ — F_X تابع متزايد.

هل F مستمر لليمين أو من اليسار عند نقطة ما؟

هل $F_X(\alpha) - F_X(\beta) \overset{?}{=} P[X \in]\alpha,\beta[\,]$ — Homework

هل $P[X \in]\alpha,\beta]\,] = F_X(\alpha) - F_X(\beta)$.

تعميم:

إذا كان لدينا $P : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ احتمال

$$F(\alpha) = P(]-\infty,\alpha[).$$

/ /

نتيجة: إذا كان لدينا $\mathcal{M} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ قياس على جبر بوريل.

فإننا نسمي F بدالة توزيع قياس $\mathcal{M}$ $F(x) = \mathcal{M}(]-\infty, +\infty[)$

ولها خواص تشابه خواص دالة التوزيع الاحتمالي في نظرية الاحتمال.

* الحصة الثانية: حل تمارين أسئلة دورات سابقة.

إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس فكمل الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mathcal{M})$ فأثبت أن $\mathcal{M}$ هو قياس كامل.

السؤال الأول / 32 علامة / :

١- عرف الجبر من أجزاء مجموعة ثم عين أربعة جبور على قواسم العدد 721.

٢- ماهو أصغر جبر من أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية والذي يحوي مجموعة الأعداد الزوجية.

٣- عرف جبر بوريل في $\mathbb{R}$ ، واذكر أربعة صفوف تولده.

٤- عرف الجبر الجداء لجبرين تامين ثم قياس الجداء لقياسين موجبين ومحددين.

الحل:

١- $X = D = \{1, 7, 103, 721\}$

$\mathcal{A}_1 = \{\phi, X\}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{A}_3 = \{\phi, X, \{1\}, \{7, 103, 721\}\}$, $\mathcal{A}_4 = \{\phi, X, \{7\}, \{7\}^c\}$

٢- $X = \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$

$E = \{2, 4, 6, \ldots\}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \{\phi, \mathbb{N}, E, E^c\}$.

٣- محلول سابقاً.

٤- لتكن $(X_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ و $(X_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ فضاءين مقيسين حيث $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$

جبرين تامين على X_1 و X_2 على الترتيب و μ_1 و μ_2 قياسان محددان

معرفان على X_1 و X_2 على الترتيب،

ذلك نعرف صف المستطيلات المقيسة R

بالشكل : $R = \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \mathcal{E}_1 , O_2 \in \mathcal{E}_2\}$

إذا كانت $\mathcal{A}$ مجموعة الاجتماعات المنتهية للمستطيلات المقيسة فإننا نسمي $\sigma(\mathcal{A})$ الجبر التام الجداء أو σ - جبر الجداء ونرمز له بـ $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ ،

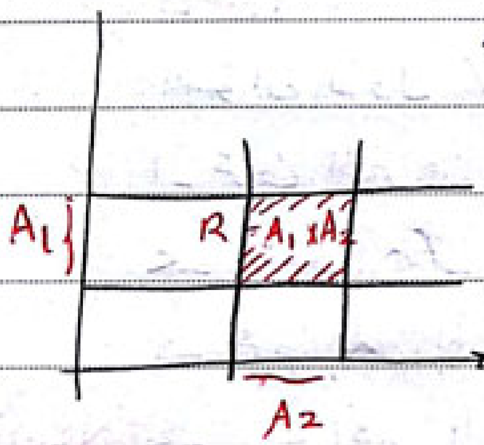
وإن الجبر التام الجداء هو أصغر جبر تام يحوي الصف R . أي $\sigma(R) = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

* كيف نعرف القياس الجداء؟ كاراتيودوري

سنعرف على صف المستطيلات تابعاً يقيس كل مجموعة مستطيل باعتبارها جداء الطول

$$\mu(O_1 \times O_2) = \mu(O_1) \times \mu(O_2).$$

ونسمي $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$



المجموعة الابتدائية

هي اتحاد منته منفصل لمستطيلات مقيسة تكتب على الشكل التالي:

$$R_1 \uplus R_2 \uplus \dots \uplus R_n \; ; \; R_i \in R \quad \forall i = 1,2,\dots,n.$$

لنعرف قياساً خارجياً على $\sigma(R)$:

لنأخذ $E \subseteq X_1 \times X_2$ مجموعة مقيسة

$$\mu^*(E) = \inf \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \times B_n) \; ; \; \bigcup_{1}^{\infty} (A_n\times B_n) \supseteq E\right\}$$

$$\mu^*(E) = \inf \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\times\mu(B_n) : \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n\times B_n) \supseteq E\right\}$$

μ^* قياس خارجي وبالتالي فهو يولد جبراً تاماً m_{μ^*} - تكون $\mu^*|_{m_{\mu^*}}$ قياساً عليه μ.

ونقول $\mu = \mu^*|_{\sigma(R)}$ قياس الجداء.

دورة الفصل الأول 2016-2017 :

السؤال الثاني (32): برر صحة أو خطأ مايلي:

ⓐ كل حلقة من أجزاء مجموعة هي جبر عليها X مثال صف المجموعات المنتهية في R

$\phi \in \mathcal{C}$ و $\forall A,B \in \mathcal{C}$ فإن $A - B \in \mathcal{C}$ و $A\cap B\in\mathcal{C}$ و $A\cup B \in \mathcal{C}$ ، $A\Delta B\in\mathcal{C}$

لأن $\mathbb{R} \notin \mathcal{C}$ لأنها غير منتهية.

ⓑ ليس كل جبر مطرد حلقة، صف المجالات نصف المفتوحة نصف المغلقة $\{[a,b[\, , a,b\in\mathbb{R}\}$

نعرّف هذا فقط طوبولوجيتين / يمكن أن نعرف طوبولوجيا كبرى وهي الطوبولوجيا المولدة من صنف المستقيمات المفتوحة،
تذكرة: هي الطوبولوجيا أصغر طوبولوجيا تجعل توابع X، Y مقاطع مستمرة.
صنف المستقيمات. المتوسطة هو أصغر جبر تام يجعل توابع X، Y مقاطع قيوسة.

/ /

٢_ كل دالة محدودة موجبة هي نهاية لمتتالية من الدوال الدرجية.

ا٤- السؤال الثالث:

اذكر نص مبرهنة التقارب المهيمن وأثبتها؟ واذكر نص مبرهنة كاراتيودوري وأثبت خطواتها الأولى.

المحاضرة التاسعة الخميس / ٦ / ٤ / ٢٠١٧م.

في المحاضرة السابقة قمنا بتعريف جبر ميو تامين بطريقة كاراتيودوري

تمهيد: إذا كان لدينا $(X, \tau_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y)$ فإنه:

$$\tau_X(f) = f^{-1}(\tau_Y) = \{ f^{-1}(O) ; O \in \tau_Y \}$$

وهي أصغر طوبولوجيا تجعل
if τ_Y topological on $Y \Rightarrow \tau_X$ topological on X.

بنفس الطريقة إن الصورة العكسية لكل جبر تام هو جبر تام.

ونضع $(X, m_X) \xrightarrow{g} (Y, m_Y)$

$$\Rightarrow m_X(g) = g^{-1}(m_Y) = \{ g^{-1}(O) : O \in m_Y \}$$

جبر تام

$$\tau_X(f) = f^{-1}(\tau_Y) = \{ f^{-1}(O) ; O \in \tau_Y \}$$

أيضاً جبر تام وهو أصغر جبر تام يجعل f مستمراً

إنّ $m_X(g)$ و $\tau_X(f)$ جبران تامان ولكن اجتماع الجبور التامة ليس بالضرورة جبر تام.

ونسمي أصغر جبر تام يحوي $\tau_X(f)$ و $m_X(g)$ الجبر التام المولد بـ f و g.

عمم:

إذا كانت لدينا أسرة من التوابع المعرفة التالية:

$$f_1 : X \longrightarrow (Y_1, m_1)$$
$$f_2 : X \longrightarrow (Y_2, m_2)$$
$$\vdots$$
$$f_n : X \longrightarrow (Y_n, m_n)$$

أخذنا صف المستطيلات الثنوية ولدنا منها صف المجموعات الأولية التي لسيكما سيدي ولنا العاكس، مع صيار أخذنا ~~احـ~~ أول، سيئ، متساوي المستطيل ورد متساوية سيدي أخذنا التكامل

/ /

فإن $\{ f_i^{-1}(A_i) : A_i \in m_{A_i} , i = 1, 2, \ldots, n \}$ جبور تامة .

إلا أن اتحادها $\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(A_i)$ ليس بالضرورة جبر تام

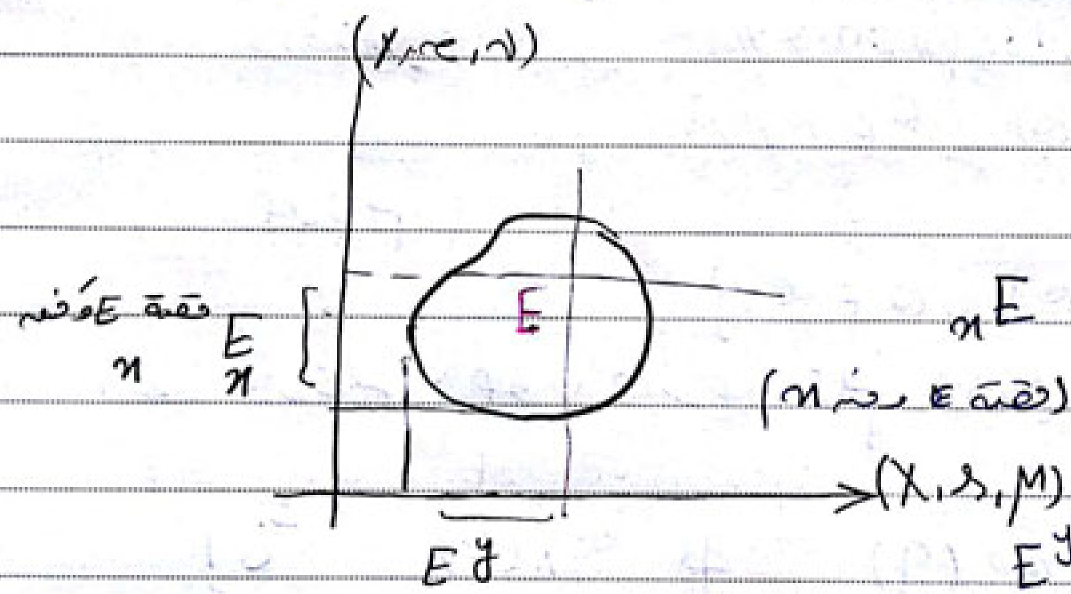
وإن أصغر جبر تام يحويها نسميه الجبر التام المولد بهذه الأسرة
$\{ f_1, \ldots, f_n \}$

جميع ما سبق ورد صفحة ٢٧ و ٢٨ الجبر التام المولد بأسرة من التطبيقات

تدريب ٢-١-١ صفحة ٦٥ .

طريقة فوبيني لتشكيل قياس الجداء (طريقة فوبيني لإنشاء قياس الجداء) .

لتكن لدينا مجموعة من فضاء الجداء $E \subseteq X \times Y$ حيث $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ و (X, S, μ) فضائين قياسيين .



نسمي المجموعة:

$$_xE = \{ y : (x, y) \in E \}$$

مقطع مجموعة E لأجل x

لترمز لمقطع E عند X أو مقطع $_xE$ (مقطع E عند x)

وبالمثل: ونسمي المجموعة:

$$E^y = \{ x : (x, y) \in E \}$$

لمقطع E عند X من الأعلى . (مقطع E عند y)

مقطع المستطيل فقط

نعتمد الإمتياز المباشر للمستطيل وكذلك التقاطع $\boxed{\text{(مطلوب إثباتها)}}$

نتيجة:

$$(A \cup B)_x = A_x \cup B_x$$

$$(A \cap B)_x = A_x \cap B_x$$

تذكير:

$S \otimes \mathcal{C}$ هو أصغر جبر تام يولد صف المستطيلات

مبرهنة مطرة:

إذا كانت $E \in S \otimes \mathcal{C}$ مجموعة قيوسة (تنتمي إلى جبر تام) قيوسة فإن مقاطعها قيوسات، أي:

(ν ميو)

/ /

if $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{C}$

$\forall x, y$ then ${}_xE \in \mathcal{C} \wedge E^y \in \mathcal{S}$

أي باختصار:

إذا كانت E مجموعة قيوسة فإن مقطعها وفق x مجموعة مقيوسة ومقطعها وفق y مقيوسة.

لنعرف قياس الجداء وفق طريقة فوبيني:

لنعرف التابعين الجداء:

$$x \xrightarrow{\varphi_E} \varphi_E(x) = \nu({}_xE)$$

سنقيس مقطع E وفق x

$$y \xrightarrow{\psi_E} \psi_E(y) = \mu(E^y)$$

كل منهما نقيس كل مقطع بطوله

حيث $\lambda(E) = \nu({}_xE)$ والتابعان ~~موجب~~ محدودان بالتالي أمكننا ...

إن φ_E و ψ_E هما تابعان قيوسان موجبان وبالتالي كل تابع قيوس موجب يكون مكاملة أي

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu(x) \text{ موجود}$$

$$\int_Y \psi(y)\, d\nu(y) \text{ موجود}$$

ما دام فوبيني ... هذه المكاملة متساوية وبالتالي يمكن الأجزاء تتوزع

ويكون

القياس الجداء

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_Y \varphi(y)\, d\nu(y) = \lambda(E)$$

وبالتالي أصبح لدينا

[illegible]

$$E \longrightarrow \lambda(E) = (\mu \otimes \nu)(E)$$

وبالتالي هذا القياس هو قياس موجب.

9-2 ٥-٢-٥ تعريف صفحة ١١٠ و ٥-٢-٦ توطئة. البرهان فيما بعد.

26:0 صفحة ١١٢، ٥-٢-٧ توطئة + برهنة ٥-٢-٨ صفحة ١١٥،

تمرين ٥-٢-٩ تمرين صفحة ١١٧ و تمرين ٥-٢-١١ صفحة ١٢٨،

سؤال امتحان كيف تعرف القياس الجداء وفق طريقة فوبيني (بدون برهان).

فوبيني والتطبيقات الصورية:

ليكن $(X, \mathcal{S}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{E}, \nu)$ فضائين مقيسين ولتكن التابع f

معرفاً على الجداء $X \times Y$ $(X \times Y, \mathcal{S} \times \mathcal{E})$ فضاء قيوس.

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y).$$

فإنه:

$$\forall x \quad f_x : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto f_x(y) = f(x, y)$$

ونسميه f_x مقطع f وفق x

$$\forall y \quad f_y : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_y(x) = f(x, y)$$

f^y مقطع f وفق y.

مثال: $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$

$$a \in X : f_a : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto f_a(y) = f(a, y) = \frac{a^2 - y^2}{a^2 + y^2 + 1}$$

$$b \in Y : f^b : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$x \longmapsto f^b(y) = f(x, b) = \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2 + 1}$$

مبرهنة هامة جداً ومطيرة (سؤال امتحان):

إذا كان f تابع قيوساً فإن ~~مستمل~~ مقطعاه قيوسان

حيث: $f : (X \times Y, \mathcal{S}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$

نعرف التكامل للتابع f_1:

$$f_1 : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

سؤال امتحان: اكتب ما تعرفه عن مبرهنة فوبيني، و ماذا تعرف عن التكامل الثنائي؟

/ /

(f_1 تابع قيوس موجب علىٰ مكاملة تكامله موجود)

ولنشكل :

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu(y)$$

$$\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu(x)$$

نستنتج :

$$\int_X \varphi(x) \, d\mu(x) = \int_Y \psi(y) \, d\nu(y) = \int_{X\times Y} f \, d\lambda$$

أي إن :

$$\int_{X\times Y} f(x,y) \, d\lambda(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

صفحة ١٠٨ له صفحة ١٠٩ ، تمرين (١) صفحة ١٨٢