المحاضرة السادسة ، مبرهنة ① اذا كانت الدالتان f و g ذ . ت . م على $[a,b]$
فإن $(f\mp g)$ ذ . ت . م على $[a,b]$ .

البرهان: نأخذ تجزئة ما P لـ $[a,b]$ حيث $P\in\mathbb{P}[a,b]$ وان

$$P=\{x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b\}$$

$$V(f\mp g,P)=\sum_{k=1}^{n}|(f\mp g)(x_k)-(f\mp g)(x_{k-1})|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|(f(x_k)\mp g(x_k))-(f(x_{k-1})\mp g(x_{k-1}))|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})+g(x_k)\pm g(x_{k-1})|\le$$

$$\sum_{k=1}^{n}[|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|g(x_k)-g(x_{k-1})|]$$

بإثبات $f-g$ بنفس البرهان .

$$\le\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

$$V(f\mp g,P)\le V(f,P)+V(g,P)$$ ناخذ الـ sup للطرفين.

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}f\mp g\le\overset{b}{\underset{a}{V}}f+\overset{b}{\underset{a}{V}}g<\infty$$

$\Leftarrow$ $f\mp g$ ذ . ت . م في $[a,b]$ .

② - $(f.g)$

ناخذ تجزئة ما P لـ $[a,b]$ حيث $P\in\mathbb{P}[a,b]$

$$P=\{x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b\}$$

$$V(f.g,P)=\sum_{k=1}^{n}|(f.g)(x_k)-(f.g)(x_{k-1})|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k).g(x_k)-f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

الافكار: $\Rightarrow$ نضيف ونطرح $f(x_{k-1}).g(x_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}|f(x_n).g(x_n)-f(x_{k-1})g(x_k)+f(x_{k-1})g(x_n)-f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left| g(x_k)\left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right]\right| + \sum \left| f(x_{k-1})\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]\right|$$

$$\le \sum \left[|g(x)| \cdot \left[f(x) - f(x_{k-1})\right]\right] + \sum \left[|f(x_{k-1})| \cdot \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]\right]$$

// f د. ت. م على $[a,b]$ ⇐ f محدودة

$\exists L > 0 , |f(x)| \le L , \forall x \in [a,b]$ //

// g د. ت. م على $[a,b]$ ⇐ g محدودة

$\exists M > 0 , |g(x)| \le M , \forall x \in [a,b]$ //

$$V(f.g, P) \le M \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + L \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

$$V(f.g, P) \le M\, V(f, P) + L\, V(g, P)$$

نأخذ الـ sup للطرفين ⇐ $\overset{b}{\underset{a}{V}} f.g \le M \overset{b}{\underset{a}{V}} f + L \overset{b}{\underset{a}{V}} g < \infty$

⇐ $f.g$ د. ت. م على $[a,b]$.

• القسمة $\frac{f}{g}$ : f د. ت. م و g د. ت. م ⇐ $\frac{1}{g}$ د. ت. م

وحسب ② $f.\frac{1}{g}$ د. ت. م ⇐ $\frac{f}{g}$ د. ت. م،

⑤ـ $a < c < b$ ، f د. ت. م على $[a,b]$ ⇐ f د. ت. م على $[a,c)$ و $[c,b]$ وبالعكس وبحقق المساواة $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$

البرهان: إذا كانت f د. ت. م على $[a,b]$ فإنه f د. ت. م على أي مجال جزئي منه فهي د. ت. م على $[a,c]$ وعلى $[c,b]$ بالتالي نأخذ التجزئتان $[a,c]$ و $[c,b]$

$P_1 = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = c\}$ $P_2 = \{y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = b\}$

نشكل التجزئة P $P = P_1 \cup P_2$

$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \ge V(f, P) = V(f, P_1) + V(f, P_2)$

بالتالي هو محدود بـ $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$

بالعكس

$$\boxed{\overset{b}{\underset{a}{V}} f \ge \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f}$$

نأخذ الـ sup ⇐ ①

• العكس: إذا كانت f د. ت. م على $[a,c]$ و f د. ت. م على $[c,b]$ المطلوب إثبات أنه f د. ت. م على $[a,b]$

نأخذ تجزئة ما P لـ $[a,b]$ حيث $c \notin P$ نشكل تجزئة أدق من P ولتكن $P'$ ⇐ $P < P'$ ⇐ $V(f, P) \le V(f, P')$

كون c.

[illegible]

نختار، تجزئتان من $P'$ لـ $[a,c]$ ، $[c,b]$ بالشكل.

$P_1' = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = c\} \Rightarrow P' = P_1' \cup P_2'$

$P_2' = \{y_0 = c < y_1 < \dots < y_n = b\}$

عندئذ نكتب :

$v(f,P) \le v(f,P_1') + v(f,P_2')$

بأخذ الـ sup للطرفين

② $\boxed{V_a^b f \le V_a^c f + V_c^b f} < \infty$

⇐ f د.م.ت على $[a,b]$ من ① و ② نستنتج ، $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$

* برهان المعايير :

① - إذا كانت f معرفة ومتزايدة على $[a,b]$ فإنها د.م.ت على $[a,b]$

وأنه $V_a^b f = |f(b) - f(a)|$ في الأعلى بالعدد .

البرهان: لتكن P تجزئة لـ $[a,b]$ حيث $P \in \mathbb{P}[a,b]$ ؛

$P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$v(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$

$= |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots + |f(b) - f(x_{n-1})|$

بما أن f متزايدة على $[a,b]$ أي $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

نكتب: $v(f,P) = f(\cancel{x_1}) - f(a) + f(\cancel{x_2}) - f(\cancel{x_1})$

$+ \dots + f(b) - f(\cancel{x_{n-1}}) = \underline{f(b) - f(a)}$

ثابتة لأن f معرفة عند a و b

نأخذ الـ sup ⇐ f د.م.ت $\Leftarrow V_a^b f = f(b) - f(a) < \infty$

وإذا أخذنا الدالة متناقصة ⇐ $V_a^b f = |f(b) - f(a)|$

المثال العاكس: [illegible] $f(x) = \sin x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

② تعريف: إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ نقول أن f أنها تحقق شرط ليبشتز (من الدرجة الأولى) (وهو شكل عام تحقق) إذا تحقق الشرط :

$\exists L > 0 : |f(x) - f(u)| \le L|x - u|$

$\forall x, u \in [a,b]$.

مبرهنة: اذا كانت $f$ معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز من الدرجة الاولى على $[a,b]$ فانها د.ت.م على $[a,b]$.

البرهان: لتكن $P$ تجزئة ما لـ $[a,b]$ حيث $P \in \mathcal{P}[a,b]$ ,

$$P = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$\forall x_k, x_{k-1} \in [a,b]$ $|f(x_k) - f(x_{k-1})|$, $k=1,2,\ldots,n$ لدينا!

بما أن $f$ تحقق شرط ليبشتز نكتب: سؤال لو تحققنا $L_i$ نأخذ $\boxed{L=\sum L_i}$

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \le L \cdot |x_k - x_{k-1}| \quad \exists L > 0.$$

$$V(f,P) \le L \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| \quad , \forall x_k \in [a,b]$$

لأنه ثابت! $\max_i$ أو $\sum_{i=1}^{n} L_i$

$$V(f,P) \le L \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\right]$$

$$\le L\,[x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}]$$

$$\le L\,[x_n - x_0] \le L\,[b-a]$$

$$V_a^b f \le L\,[b-a] < \infty$$

$f$ د.ت.م على $[a,b]$.

---

المحاضرة السابعة: حل تمارين: أوجد التغير الكلي لكل من الدوال الآتية مع الرسم:

1)- $f(x) = x^2 - 4x \quad ; \quad x \in [0,6]$

2)- $g(x) = |x-5| \quad , \quad x \in [0,10]$

3) $h(x) = 2[x] + 2 \quad ; \quad x \in [0,3]$

4)- $$\psi(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ x+3 & 2 < x \le 6 \end{cases}$$

(5) بين أن الدالة $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ د.ت.م على $[2,+\infty[$ أوجد $V_2^{\infty} f$.

/ /

6) – $f(x) = x^2 - \frac{1}{x+1}$ د. ت. م على $[0, 1]$

ثم أوجد $V_0^1 f$.

7) – بين أن الدالة المعرفة على $]0, \frac{1}{2}]$ تحقق د. ت. م على $[0, \frac{1}{2}]$ ، و لا تحقق شرط ليبشتز.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

الحل

5) – $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3} < 0$

دالة متناقصة على المجال $[2, +\infty[$ أي دالة د. ت. م على أي مجال جزئي منتهي منه. لأن $f$ متناقصة (مطردة) أولا

$V_2^{\infty} f = \lim_{A \to \infty} V_2^{A} f \cancel{\infty} = \lim_{A \to \infty} \{|f(2) - f(A)|\}$ $|f(b) - f(a)|$

$= \lim_{A \to \infty} [\frac{1}{9} - \frac{1}{(A+1)^2}] = \frac{1}{9} < \infty \Rightarrow f$ د. ت. م على $[2, \infty[$

7) – $f'(x) = \frac{+\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\frac{1}{\ln 2}$ |

← من الجدول نجد أن متزايدة على $\frac{1}{2}$

$-\ln \frac{1}{2} = -(\ln(1) - \ln 2) = \ln 2.$

التابع $f$ متزايد على $[0, \frac{1}{2}] \Leftarrow f$ د. ت. م.

شرط ليبشتز : $\exists L > 0 : |f(u) - f(v)| < L|u - v|$

$, \forall u, v \in [0, \frac{1}{2}]$ [illegible] - الصفر

$\Rightarrow \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} < L$ ( شبه الاشتقاق ) :

عندما ندرس الاشتقاق نبين أن شرط ليبشتز :

(8) [illegible]

$\lim_{v \to 0} \frac{|f(0) - f(v)|}{|v|} = \lim_{v \to 0} \frac{|f(v)|}{|v|} = \lim_{v \to 0} \frac{|-\frac{1}{\ln v}|}{|v|}$

~~[illegible]~~

ω تسعى للصفر فإن ln ω سالب $\lim_{\omega \to 0} -\frac{1}{\ln \omega}$ مع سالب

مثل أصبحت موجب بالتالي يمكن إزالة القيمة المطلقة.

عن $|f(\omega)|$

$$\lim_{\omega \to 0} -\frac{1/\omega}{\ln \omega} = \frac{\infty}{\infty}$$

يمكن تطبيق قاعدة أوبيتال

لمشتقة البسط ومشتقة المقام.

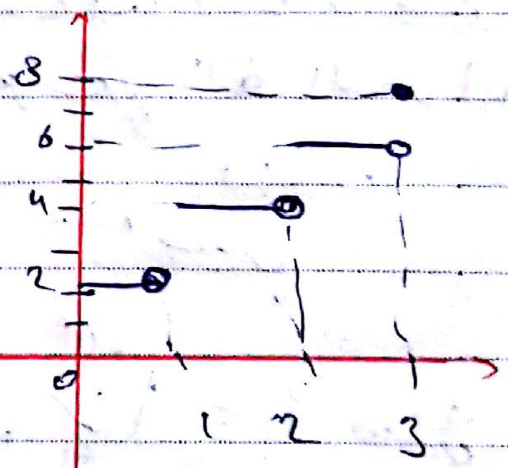
$$\lim \frac{-\frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega}} = \infty$$

لا يوجد L تحقق شرط ليبشتز

3 $[x] = n \quad : \quad n \leq x \leq n+1$

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0+2 & 0 \leq x < 1 \\ 4 & 1 \leq x < 2 \\ 6 & 2 \leq x < 3 \\ 8 & x = 3. \end{cases}$$



والتابع $h(x)$ متزايد في $[0,3]$ فهو د.ت.م.

$$V_0^3 h = |h(3) - h(0)| = |8 - 2| = 6.$$

4 $f'(x) = 2x + \frac{1}{(x+1)^2}$

الدالة متزايدة على $[0,1]$ وبالتالي:

الدالة د.ت.م على $[0,1]$.

$$V_0^1 f = |f(1) - f(0)|$$
$$= \left|\frac{1}{2} - (-1)\right| = \frac{3}{2}.$$

المحاضرة الثامنة : * معايير د. ت. م :

③ - f ~~...~~ قابلة للاشتقاق على [a,b] ومشتقة محدودة على [a,b] فإن f د. ت. م على [a,b] ~~...~~، أي ،

f د. ت. م على [a,b] ⇐ $|f'(x)| \le L$ : $\exists L > 0$

④ - f قابلة للاشتقاق على (a,b) / عدا باستثناء عدد منتهٍ من النقاط وكان $\int_a^b |f'(x)|dx$ موجود ومحدود فإن f د. ت. م على [a,b]

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

⑤ - f دالة معرفة على [a,b] . f د. ت. م على [a,b] ⇔ $f = f_1 - f_2$ حيث $f_1$ و $f_2$ دالتين متزايدتين على [a,b] .

* تطبيقات د. ت. م :

. تعريف المنحني الجمع C : (له طول محدود) .

. نظرية جوردان : الشرط اللازم والكافي لكون المنحني C جمعاً (في المستوي) هو أنه يكون كلاً من الدالتين $x(t)$ , $y(t)$ د. ت. م على $[\alpha , \beta]$

// طول المنحني محدود إذا كانت كل من دوال ذات تغير محدود بشرط أنه لا يكون هناك نقاط مكررة إلا البداية والنهاية (مغلق) هذه المرحلة لا تعطي الطول فقط لبرهن أنه له طول //

// بالمعيار الثاني إذا حققنا $|4-a|$ . وأضفنا الإطلاق على ما المعيار 3 /

تعريف : إذا كانت f د. ت. م على [a,b] نعرف // دالة التغير الكلي // للدالة f بالشكل التالي :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = a \\ V_a^{x} f & a < x \le b \end{cases}$$

متغير

(دوماً ابتداءً من الصفر) .

إنه g ① محدودة ② متزايدة : ③ د. ت. م

$$|g(x)| \le |V_a^x f| \le V_a^b f < \infty \quad , \forall x \in [a,b].$$

⇐ g دالة محدودة .

لنبرهن أنه $x_1 \le x_2 \Rightarrow g(x_1) \le g(x_2)$

من الجزئية ، $\boxed{a} \le x_1 < x_2 \le b$

$$0 \le V_a^{x_2} f = V_a^{x_1} f + V_{x_1}^{x_2} f \Rightarrow V_{x_1}^{x_2} f = V_a^{x_2} f - V_a^{x_1} f \geq 0$$

دوماً موجب

/ /

بالتالي: $g(x_2) \geqslant g(x_1) \Leftarrow V_a^{x_2} f \geqslant V_a^{x_1} f$

⟸ $g$ دالة متزايدة على $[a,b]$ حسب المعيار الأول ⟸ $g$ د.ت.م على $[a,b]$

• مبرهنة $\boxed{5}$ $f$ دالة معرفة على $[a,b]$.

$f$ د.ت.م على $[a,b]$ ⟺ $f = f_1 - f_2$ حيث $f_1, f_2$ دالتين متزايدتين على $[a,b]$

البرهان: $f$ د.ت.م على $[a,b]$ ⟸ $f = f_1 - f_2$

نأخذ الدالة $g(x)$ دالة التغير الكلي للدالة $f$ هي متزايدة. نبني دالة جديدة (الباقي). $h(x) = g(x) - f(x)$ ونبرهن أنه $h(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$ إذا تم البرهان فنحصل على $f(x) = g(x) - h(x)$

لإثبات أنه $h(x)$ متزايدة على $[a,b]$ لنأخذ $x_1, x_2 \in [a,b]$ حيث $x_1 < x_2$ ونثبت أنه $h(x_1) \leq h(x_2)$

$$h(x_2) - h(x_1) = [g(x_2) - f(x_2)] - [g(x_1) - f(x_1)]$$

$= (g(x_2) - g(x_1)) - (f(x_2) - f(x_1))$ نثبت أن المقدار أكبر أو يساوي الصفر.

الجوهر

إنه: $\left(f(x_2) - f(x_1)\right) \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq V_{x_1}^{x_2} f$

$$V_{x_1}^{x_2} f = V_a^{x_2} f - V_a^{x_1} f$$

$$f(x_2) - f(x_1) \leq V_a^{x_2} f - V_a^{x_2} f$$

$$f(x_2) - f(x_1) \leq g(x_2) - g(x_1) \Rightarrow$$

$$(g(x_2) - g(x_1)) - (f(x_2) - f(x_1)) \geqslant 0$$

$\Rightarrow h(x_2) - h(x_1) \geqslant 0 \Rightarrow h(x_2) \geqslant h(x_1) \Rightarrow$ $h$ متزايدة

العكس: $f = f_1 - f_2$ حيث $f_1, f_2$ متزايدتين ⟸ $f$ د.ت.م على $[a,b]$

$f_1$ دالة متزايدة على $[a,b]$ ⟸ $f_1$ د.ت.م على $[a,b]$

$f_2$ 〃 〃 〃 $[a,b]$ ⟸ $f_2$ 〃 〃 〃 〃

⟸ $f_1 - f_2$ د.ت.م على $[a,b]$ ، نعلم فرق دالتين كل منهما د.ت.م على $[a,b]$ هو د.ت.م

⟸ $f$ د.ت.م على $[a,b]$

$\mathcal{L}(P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$ ، $L=\sup_{P\in P[\alpha,\beta]}\mathcal{L}(P)<\infty$ / / $\Leftrightarrow$ مـ مع

**التطبيقات، تعريف المنحني المجع C :**

منحني $\begin{cases} x(t)=\varphi(t) \\ y(t)=\psi(t) \end{cases}$ ، $t\in[\alpha,\beta]$ بالمستوي

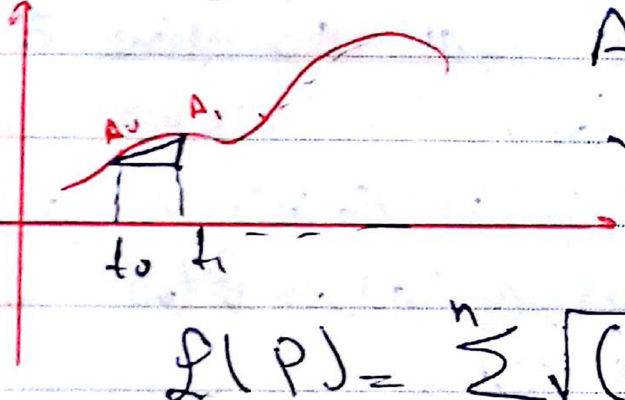
نأخذ تجزئة للمجال $[\alpha,\beta]$

$P=\{\alpha=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=\beta\}$

لتكن النقاط $A_0, A_1, \dots, A_n$ نقاطاً على المنحني C.

$A_0(x(t_0),y(t_0))$ ، $A_1(x(t_1),y(t_1))$

$\dots$ ، $A_n(x(t_n),y(t_n))$.



وترا ه كتابة و وتر الزوايا باتباع مثلث قائم حسب فيثاغورث.

نحصل على أطوال إذا وصلنا بين النقاط بقطع مستقيمة،

$$\mathcal{L}(P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x(t_n)-x(t_{n-1}))^2+(y(t_n)-y(t_{n-1}))^2}$$

ثم نحصل على طول المنحني الحقيقي كلما n تسعى إلى ∞ لذلك نأخذ:

$$\boxed{L=\sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]}\mathcal{L}(P)<\infty}\Rightarrow$$ // منحني مجع //

عندئذٍ نقول إن المنحني C مُجمَّع أو قابل للقيس (موجود وله حد للطول)

**الفائدة منها:** ندرس هذه الدوال نبادل بـ دوال د.ت.م إذا كانت د.ت.م بالتالي المنحني مجع وله طول محدد.

• الطول: $\ell=\int_a^b\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt.$

• **نظرية جوردان: أثرة:** C منحني مجع $\Leftarrow$ $x(t), y(t)$ د.ت.م على $[\alpha,\beta]$.

**البرهان:** نأخذ تجزئة ما لـ $[\alpha,\beta]$ حيث $P=\{t_0=\alpha<t_1<\dots<t_n=\beta\}$

$$\mathcal{L}(P)=\sum_{n=1}^{n}\sqrt{\underbrace{(x(t_n)-x(t_{k-1}))}_{a_k}{}^2+\underbrace{(y(t_k)-y(t_{k-1}))}_{b_k}{}^2}$$

$\boxed{|a_k|\le\sqrt{a_k^2+b_k^2}}$ الحصر ، $|b_k|\le\sqrt{a_k^2+b_k^2}$

نعوض هنا الحد. نأخذ المجموع للطرفين.

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

/ /

نأخذ الـ sup للطرفين.

$$\sup \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| \leq \overset{L}{\mathcal{L}} \Rightarrow \bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) \leq \mathcal{L} < \infty$$

إذاً $x(t)$ د.ت.م م $[\alpha, \beta]$ وكذلك الأمر بالنسبة لـ $y(t)$.

// العكس // $x(t)$, $y(t)$ د.ت.م م على $[\alpha, \beta]$ والمطلوب: C منحني ج.

البرهان: نأخذ تجزئة ما لـ $[\alpha, \beta]$ بحيث:

$$P = \{t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta\}.$$

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) < \infty \Rightarrow$$

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha, \beta]} \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| < \infty$$

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha, \beta]} \sum_{k=1}^{n} |y(t_k) - y(t_{k-1})| < \infty$$

$$\sqrt{(\underbrace{x(t_k) - x(t_{k-1})}_{a_k})^2 + (\underbrace{y(t_k) - y(t_{k-1})}_{b_k})^2}$$

معلوم

$$\boxed{|a_k| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq |a_k| + |b_k|}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \leq \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |y(t_k) - y(t_{k-1})|.$$

نأخذ الـ sup للطرفين.

$$\mathcal{L} \leq \bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) + \bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) < \infty$$

كون $y(t)$, $x(t)$ د.ت.م م $[\alpha, \beta]$ $\Leftarrow$ المنحني C منحني ج.

مثال ①: أثبت أن المنحني المعرف وسيطياً هو منحني ج.

$$C_1 : \begin{cases} x = t - \sin(t) & , t \in [0, 2\pi] \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

$$C_2 : \begin{cases} x = \cos t & t \in [0, 2\pi] \\ y = \sin t \end{cases}$$

/ /

حالتنا: مشتقة للأولى وإذا كانت محدودة فهي د.ت.م.

$|x'(t)| = |1-\cos t| \leq |1| + |\cos t| \leq 2 , \forall t \in [0,2\pi]$

$\Leftarrow$ $x(t)$ د.ت.م على $[0,2\pi]$

$|y'(t)| = |\sin t| \leq 1 , \forall t \in [0,2\pi]$

$\Leftarrow$ $y(t)$ د.ت.م على $[0,2\pi]$

هنا كحساب لطول قطعة القانونة: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt$

---

الحلقة التاسعة: تمارين:

① أثبت أن الدالة: $f(x) = x - |x|$ دالة د.ت.م على $[-5,5]$ ثم أوجد $V_{-5}^{5} f$

② أوجد التغير الكلي للدالة $y = |\cos x|$ في المجال $[0,2\pi]$ ثم ارسم.

③ مثل الدالة $f(x) = \sin x$ في المجال $[0,2\pi]$ إلى دالتين متزايدتين.

④ بين أن الدالة $f(x) = |x-5|$ د.ت.م على $[0,10]$ ثم أوجد التغير الكلي لها.

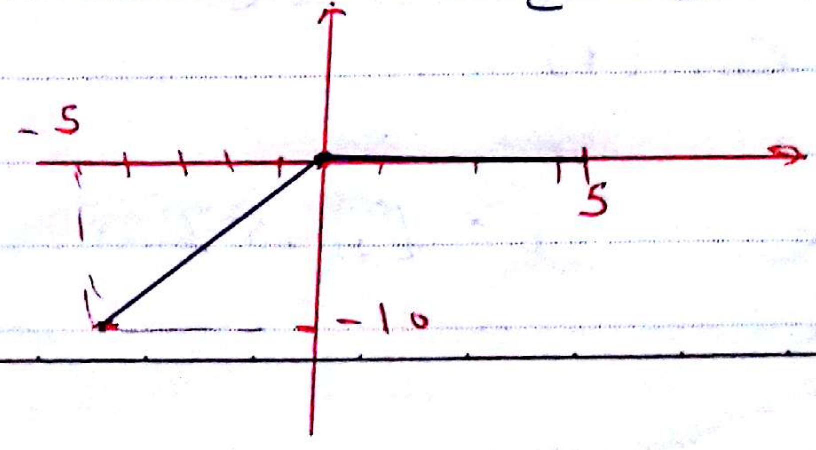
⑤ بين أن الدالة: $f(x) = x^2 - 4x$ د.ت.م على المجال $[0,6]$ ثم أوجد التغير الكلي لها بطريقتين مع رسم.

الحل: ① $x$ متزايدة $\Leftarrow$ د.ت.م ، $|x|$ د.ت.م فالفرق $\Leftarrow$ $x - |x|$ د.ت.م.

$$|x| = \begin{cases} x , & x \geqslant 0 \\ -x , & x < 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & x \geqslant 0 \\ 2x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; -5 \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

الرسم:



أ جميع هنا كل الدالة متزايدة في $[-5,5]$ $\Leftarrow$ د.ت.م.

/ /

$f_1(x) = x$ دالة متزايدة على $[-5, 5]$ لأن $f_1'(x) = 1 > 0$

وبالتالي $f_2(x) = |x|$ د.ث.م على $[-5, 5]$ إذاً $f(x) = x - |x|$

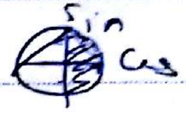
نوجد الفرق بين كل منهما د.ث.م على $[-5, 5]$ ⇐ $f(x)$ د.ث.م على $[-5, 5]$

التغير الكلي لها .

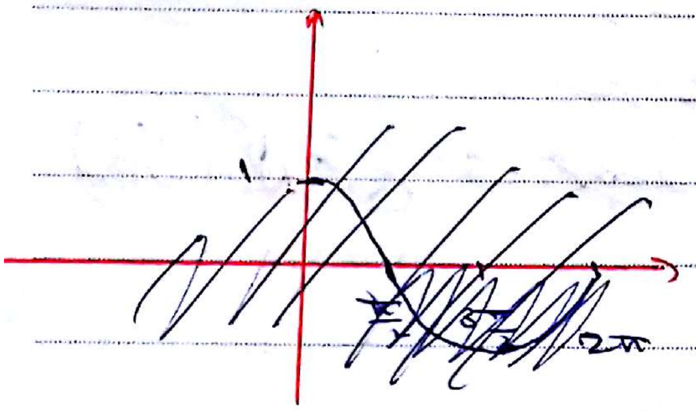
$$V_{-5}^{5} f = |f(5) - f(-5)| = |0 - (-10)| = |10| = 10.$$

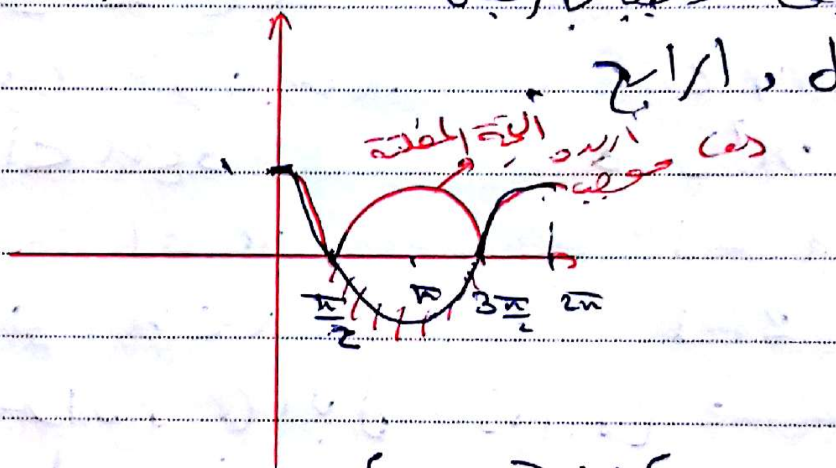
// $f(x) = x - |x - 1|$ ح كتاب //

٢ - $y = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & \cos x \geq 0 \\ -\cos x & \cos x < 0. \end{cases}$



ال cos موجب بالربعين الأول والرابع .





$y = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [3\frac{\pi}{2}, 2\pi] \\ -\cos x & x \in ]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}[ \end{cases}$

$$\overset{2\pi}{V} f = \overset{\pi}{V_0^{\frac{\pi}{2}}} f + \overset{\pi}{V_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}} f + V_{\pi}^{3\pi/2} f + V_{3\pi/2}^{2\pi} f$$

جزئ الفترة

الدالة متزايدة ومتناقصة

$$= |f(\tfrac{\pi}{2}) - f(0)| + |f(\pi) - f(\tfrac{\pi}{2})| + |f(3\tfrac{\pi}{2}) - f(\pi)| + |f(2\pi) - f(3\tfrac{\pi}{2})| = |0 - 1| + |+1 - 0| + |0 - (+1)| + |+1 - 0| = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

من تعريف f

• إذا طلب السؤال أثبت أنها د.ث.م فأقول $f(x) = \cos x$ دالة د.ث.م لأن مشتقتها محدودة $|-\sin x| \leq 1$ $x \in [0, 2\pi]$ أو نحسب التغير الكلي $\int_0^{2\pi} |-\sin x|\, dx$.

٣ - $f(x) = \sin x$ أريد منك أن تبين الدالة متزايدة على؟ أجزئ هذا الفرع لفترات متزايدة وأقسم إلى فترات .

مثال / /

$f(x) = x - (x - \sin x)$ ل $\cos$ ، $\cos^2$ ، $\sin^2$ متزايدة لا نهائياً لا تزيد

ن ⊥ لأنها دالة التقدير الثابت.

تزايد $f(x)$ م مجموع الدوال التي تقوم أنفصلة الأول

$$f(x) = \begin{cases} \underset{\text{دالة}}{\sin x} - \underset{\text{دالة}}{0} & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 - (1 - \sin x) & x \in [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}] \\ (\sin x + 1) - 1 & x \in [3\frac{\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

م $|\sin x|$ تزايد . $x - (x - |\sin x|)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

متزايدة ، متزايدة

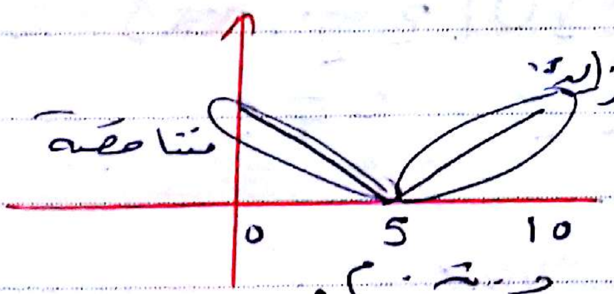
لجزأ كل فرع إلى فرق دالتين متزايدتين.

لا أستطيع إيجاد؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 - 1 & x = 1 \\ 2 - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

ناخذ $x - 5$ متزايدة على المجال $[0, 10]$ فتستقر مبرهنة ⟸

د.ت.م ⟸ إنها إ د.ت.م.



بما جزائية يتم $|10|$

• الا جزء قطع مكافئ.

⟸ تستطيع الدالة ( فرق دالتين متزايدتين ) ⟸ د.ت.م

$|2x - 4| \le$ ( محدود ) نستطيع نأخذ أي محدودة لـ $x$

محدود..

نرى هل مشتقة محدودة ام لا.