٢ . ١١ . معادلة بسل التفاضلية:

Bessel's Differential Equation:

٢ . ١١ . ١ . مقدمة:

نكتب معادلة بسل التفاضلية على الشكل الآتي:

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - n^2) w = 0$$

حيث n مقدار ثابت.

ولإيجاد حل المعادلة في صورة متسلسلة لا نهائية حيث $z = 0$ نقطة شاذة وأن:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z.z}{z^2} = 1 \quad , \quad \lim_{z\to 0} \frac{(z^2 - n^2)}{z^2} z^2 = -n^2$$

إذاً: $z = 0$ نقطة شاذة منتظمة لذلك نستخدم طريقة فروبنيوس.

نفترض أن الحل على الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_k z^{k+r}$$

بالاشتقاق وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$\sum_0^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) z^{k+r} + \sum_0^{\infty} a_k (k+r) z^{k+r} + \sum_0^{\infty} a_k z^{k+r+2}$$

$$- \sum_0^{\infty} a_k n^2 z^{k+r} = 0$$

بمساواة معامل z^{k+r} بالصفر فنجد أن:

$$\therefore a_k (k+r)(k+r-1) + a_k (k+r) + a_{k-2} - n^2 a_k = 0$$

$$\Rightarrow a_k [(k+r)^2 - n^2] = - a_{k-2} \qquad (1)$$

بوضع $k = 0$ في (1) فإن المعادلة الدليلية فنحصل على:

$$r^2 - n^2 = 0 \quad , \quad a_{-2} = 0 \quad , \quad a_0 \neq 0$$

$$\therefore r = n , - n.$$

أي إن الجذرين حقيقيان والفرق بينهما 2n.

حيث إن الفرق بين الجذرين عدد كسري أو عدد صحيح موجب. ويساوي 2n

من (1) نرى أن:

$$a_k = \frac{-1}{(k+r)^2 - n^2} a_{k-2} \quad , \quad k \geq 2$$

من هذه العلاقة نحصل على:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$$

$$\therefore a_2 = \frac{-1}{(r+2)^2 - n^2} a_0$$

$$a_4 = \frac{-1}{(r+4)^2 - n^2} a_2 = \frac{(-1)^2}{\left[(r+4)^2 - n^2\right]\left[(r+2)^2 - n^2\right]} a_0, \ldots$$

ويكون الحل هو:

$$\therefore w = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+r}$$

فنحصل على:

$$= a_0 z^r \left[1 - \frac{1}{(r+2)^2 - n^2} z^2 + \frac{(-1)^2}{\left[(r+4)^2 - n^2\right]\left[(r+2)^2 - n^2\right]} z^4 + \ldots\right]$$

بوضع $r = n$ أي أن:

$$\therefore w = a_0 z^n \left[1 - \frac{1}{2^2 (n+1)} z^2 + \frac{(-1)^2}{2^4 (n+2)(n+1) 2!} z^4 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^k}{2^{2k} (n+k)(n+k-1) \ldots (n+2)(n+1) k!} z^{2k} + \ldots \right]$$

$$= a_0 z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(n+k)(n+k-1) \ldots (n+2)(n+1) k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

باختيار:

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$$

ويكون الحل الأول على الشكل $J_n(z)$، حيث:

$$w_1 = J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1).k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$$

وتسمى دالة بسل من النوع الأول.

وإذا وضعنا $r = -n$ نحصل على الحل الثاني:

$$w_2 = J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1).k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}$$

ويكون الحل العام:

$$w = AJ_n(z) + BJ_{-n}(z)$$

حيث n عدد غير صحيح، A, B ثابتان اختياريان.

٢ . ١١ . ٢ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

الحل:

نعلم من التعريف أن:

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1).k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}$$

بوضع $-n+k=r$ أي $k=n+r$ فنحصل على:

$$J_{-n}(z)=\sum_{r=-n}^{\infty}\frac{(-1)^{n+r}}{\Gamma(r+1).(n+r)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2n+2r}$$

$$=\sum_{r=-n}^{\infty}\frac{(-1)^{n+r}}{\Gamma(n+r+1).\Gamma(r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}$$

$$\Gamma(-n+1)=\infty\ ,\ -n+1\le 0\Rightarrow\Gamma(r+1)=\infty\ ,\ -n\le r\le -1$$

$$\therefore J_{-n}(z)=(-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r+1).r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}=(-1)^n J_n(z)$$

مثال (٢):

إذا علم أن:

$$\sin(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-..=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z)=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-..=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

فأثبت أن:

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(z)\quad ,\quad J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(z)$$

الحل:

حيث إن:

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$$

فإن:

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\dots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1} \quad , \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!(2k+1)(2k-1)\dots3\cdot1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{k+1}(2k)(2k-2)\dots4.2}{k!(2k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{k+1}k!}{k!(2k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}$$

$$\therefore J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z)$$

وبشكل مشابه نجد:

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\frac{1}{2}+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\dots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k}{k!(2k-1)(2k-3)\dots3\cdot1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k(2k)(2k-2)\dots4.2}{k!(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}k!}{k!(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$$

مثال (٣):

أثبت أن:

$$J^2_{\frac{1}{2}}(z) + J^2_{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{2}{\pi z}$$

الحل:

باستخدام المثال السابق نجد أن:

$$J^2_{\frac{1}{2}}(z)+J^2_{-\frac{1}{2}}(z)=\frac{2}{\pi z}\sin^2(z)+\frac{2}{\pi z}\cos^2(z)=\frac{2}{\pi z}\left(\sin^2(z)+\cos^2(z)\right)=\frac{2}{\pi z}$$

٢ . ١١ . ٣ . الدالة المولدة لدوال بسل: Generating Function for $J_n(z)$

تسمى الدالة:

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)^n$$

بالدالة المولدة لدوال بسل، حيث n عدد صحيح، ونستطيع استنتاج بعض العلاقات التكرارية لدوال بسل كما يلي:

٢ . ١١ . ٤ . العلاقات التكرارية لدوال بسل:

Recurrence Relations for $J_n(z)$:

1) $J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z)$

2) $J'_n(z) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right]$

3) $\frac{d}{dz}\left[z^n J_n(z)\right] = z^n J_{n-1}(n)$

4) $\frac{d}{dz}\left[z^{-n} J_n(z)\right] = -z^{-n} J_{n+1}(z)$

الإثبات:

١) بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى t:

$$\frac{z}{2}(1+\frac{1}{t^2})e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(z)t^{n-1}$$

$$\frac{z}{2}(1+\frac{1}{t^2})J_n(z)t^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(z)t^{n-1}$$

بمساواة معامل t^{n-1} في الطرفين نحصل على:

$$\therefore \frac{z}{2}J_{n-1}(z)+\frac{z}{2}J_{n+1}(z)=nJ_n(z)$$

$$\therefore J_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}J_n(z)-J_{n-1}(z) \qquad \text{(i)}$$

٢) بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى z فنجد أن:

$$\therefore \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum J'_n(z)t^n$$

$$\therefore \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\sum J_n(z)t^n=\sum J'_n(z)t^n$$

بمساواة معامل t^n في الطرفين فنحصل على:

$$J'_n(z)=\frac{1}{2}\left[J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)\right] \qquad \text{(ii)}$$

٣) من العلاقة (ii)، فإن:

$$J_{n+1}(z)=J_{n-1}(z)-2J'_{n-1}(z) \qquad \text{(I)}$$

بطرح (I) من العلاقة (i) فنحصل على:

$$\therefore 0=\frac{2n}{z}J_n(z)-2J_{n-1}(z)+2J'_n(z)$$

$$\therefore nJ_n(z)+zJ'_n(z)=zJ_{n-1}(z)$$

بضرب طرفي المعادلة في z^{n-1} فنجد أن: