عملي

◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄ المحاضرة الثالثة

عنوان المحاضرة: حل تمارين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتمارين عن تكافؤ المسافات

٢ ـ الفضاءات الطوبولوجية المتورة

٣ـخواص اللصاقات

التمرين الأول : أثبت أن المسافات التالية متكافئة :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$d_1(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$
$$d_2(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

حيث $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$

الحل :

توطئة : لاثبات أن المسافتين d_1, d_2 متكافئتين هو أن يوجد عددان حقيقيان $s, t > 0$ بحيث :

$t\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq s\, d_1(x,y)$ ، لنبدأ:

لنضع $\boldsymbol{\alpha} = |\mathbf{x_1} - \mathbf{y_1}|$ و $\beta = |x_2 - y_2|$ ، لنلاحظ ما يلي في المستوي :

في المستوي نلاحظ أن طول الوتر أطول من طول كل من الضلعين القائمتين و أصغر من مجموع طوليهما

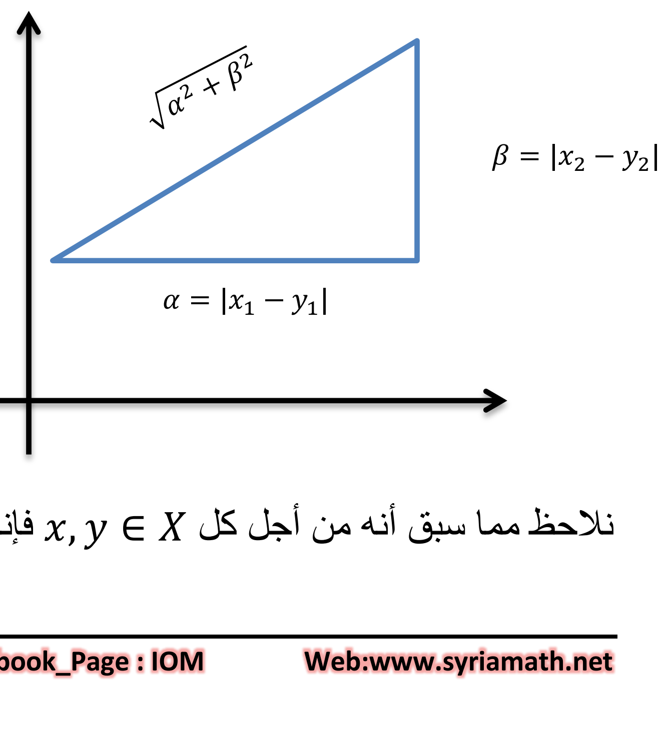
و بالتالي هو أطول من أطول الضلعين القائمتين و اصغر من مجموع طوليهما

و لدينا هنا الوتر هو $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

و أطول الضلعين القائمتين هو $\max\{\alpha, \beta\}$

إذاً يصبح لدينا :

$$\max\{\alpha,\beta\} \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leq \alpha+\beta \leq \max\{\alpha,\beta\} + \max\{\alpha,\beta\}$$
$$= 2\max\{\alpha,\beta\} \leq 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$
$$\Leftrightarrow d_1(x,y) \leq d(x,y) \leq d_2(x,y) \leq 2d_1(x,y) \leq 2d(x,y)$$



نلاحظ مما سبق أنه من أجل كل $x, y \in X$ فإنه يكون:

$\exists\, 1,2 > 0 : \mathbf{1}.\, d_{\mathbf{1}}(x,y) \le d(x,y) \le \mathbf{2}\, d_1(x,y) \Longrightarrow$ متكافئتين $d_1 \& d$

$\exists 1,2 > 0 : \mathbf{1}.\, d(x,y) \le d_2(x,y) \le \mathbf{2} d(x,y) \Longrightarrow$ متكافئتين $d \& d_2$

$\exists 1,2 > 0 : \mathbf{1}.\, \mathrm{d}_1(x,y) \le d_2(x,y) \le \mathbf{2} d_1(x,y) \Longrightarrow$ متكافئتين $d_1 \& d_2$

تمرين : أثبت أن $|d(x,y) - d(z,u)| \le d(x,z) + d(y,u)$ و ذلك لكل $x,y,z,u \in X$ حيث (X,d) فضاء متري .

الحل : بما أن دالة المسافة تحقق متراجحة المثلث فإنه يكون:

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \le d(x,z) + d(z,u) + d(u,y)$$

$$\Longrightarrow d(x,y) - d(z,u) \le d(x,z) + d(u,y) \ldots\ldots (*)$$

من جهة أخرى و بشكل مماثل يمكن أن نكتب :

$$d(z,u) \le d(z,y) + d(y,u) \le d(z,x) + d(x,y) + d(y,u)$$

$$\Rightarrow d(z,u) - d(x,y) \le d(x,z) + d(y,u) \ldots . (**)$$

نعلم أنه إذا كان $\alpha \le \beta\, , -\alpha \le \beta \Rightarrow |\alpha| \le \beta$ و من $(*), (**)$ نجد :

$$\boxed{d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \le d(x,z) + d(z,u) + d(u,y)}$$

تمرين : لتكن $X \neq \emptyset$ و $|X| = cardX > 2$ و $\emptyset \subseteq A \subseteq X$ و لنأخذ $\tau = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ ، أثبت أن τ طوبولوجيا على X و أثبت أن الفضاء الطوبولوجي (X,τ) غير متور .

الحل : حتى تكون τ طوبولوجيا على X يجب أن تحقق الشروط الثلاثة الواردة في تعريف الطوبولوجيا :

- ✓ $\emptyset, X \in \tau$ و هي محققة وضوحاً.
- ✓ مغلقة بالنسبة للتقاطع ، و لنتحقق من ذلك من خلال تشكيل الجدول التالي :

$\cap$	$\emptyset$	A	A^c	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
A	$\emptyset$	A	$\emptyset$	A
A^c	$\emptyset$	$\emptyset$	A^c	A^c
X	$\emptyset$	A	A^c	X

نلاحظ أن تقاطع أي عنصرين من عناصر τ هو عنصر من τ.

✓ مغلقة بالنسبة للاتحاد :أيضاً نشكل جدول:

$\cup$	$\emptyset$	A	A^c	X
$\emptyset$	$\emptyset$	A	A^c	X
A	A	A	X	X
A^c	A^c	X	A^c	X
X	X	X	X	X

نلاحظ أنها مغلقة بالنسبة للاتحاد المنتهي ، و بالتالي و بالاستفادة من خواص الاتحاد التبديلية و التجميعية ينتج أنها مغلقة بالنسبة للاتحاد غير المنتهي.

إذاً (X,τ) فضاء طوبولوجي ، إلا أنه غير متور ذلك لأنه لو كان فضاءً متوراً ستكون –حسب نص سابق- كل مجموعة منتهية ستكون مغلقة و لنثبت ذلك :

لنفرض جدلاً أن الفضاء (X,τ) متور ، و ليكن $a \in A, b \in A^c$ عندئذٍ تكون كل من المجموعتين $\{a\},\{b\}$ مغلقتين (كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مغلقة) ، ولما كانت متممة أي مجموعة مغلقة هي مجموعة مفتوحة ينتج مباشرةً أن:

$$\{b\}^c = X \setminus \{b\} \text{ مفتوحة} \qquad \& \qquad \{a\}^c = X \setminus \{a\} \text{ مفتوحة}$$

و قولنا إن المجموعة مفتوحة يكافئ قولنا بأنها تنتمي إلى τ و بالتالي :

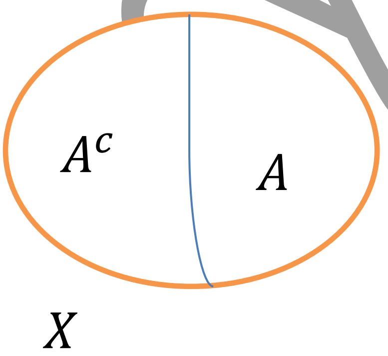
$$X \setminus \{a\}, X \setminus \{b\} \in \tau = \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

- و بملاحظة أن $X \setminus \{a\} \neq \emptyset$ (لأن $b \in X \setminus \{a\}$) و أيضاً $X \setminus \{a\} \neq A$ (لأن $a \in A$)
  و أيضاً $X \setminus \{a\} \neq X$ ، فلم يبقى سوى أن يكون (1) ... $\boxed{X \setminus \{a\} = A^c}$
- و بنفس المناقشة السابقة نجد أن (2) ... $\boxed{X \setminus \{b\} = A}$

من النتيجة $(\mathbf{1})$: $\{a\} = (X \setminus \{a\})^c = (A^c)^c = A$ إذاً $A = \{a\}$

من النتيجة $(\mathbf{2})$: $\{b\} = (X \setminus \{b\})^c = A^c$ إذاً $A^c = \{b\}$

و عليه يكون :



$$X = A \cup A^c = \{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$$

و هذا يناقض كون $|X| = cardX > 2$ ، وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ و (X,τ) غير متور .

تمرين : أثبت أن (X,τ) حيث $\tau = P(X)$ و $X \neq \emptyset$ هو فضاء طوبولوجي متور.

الحل: وجدنا سابقاً أن (X,τ) هو فضاء طوبولوجي و أسميناه الفضاء الطوبولوجي المتقطع ،

أما لإثبات أنه متور، لنعرف دالة المسافة المتقطعة على X كما يلي :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$$

و بالتالي يكفي لكي يكون متوراً هو إثبات أن $\tau_d = \tau = P(X)$ (أي يجب أن يكون كل مجموعة جزئية من $\boldsymbol{X}$ مفتوحة وفق دالة المسافة $\boldsymbol{d}$) ليكن $a \in X$ فنجد أن :

$$N_d(a,1) = \{x \in X : d(x,a) < 1\} = \{a\}$$

بالتالي كل مجموعة وحيدة العنصر هي كرة مفتوحة في **الفضاء المتري** (X,d) ، و لما كانت كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة ، فإن $\{a\}$ مفتوحة في **الفضاء المتري** (X,d) ، و بما أن اجتماع مجموعات مفتوحة هو مفتوحة .. فإن كل مجموعة جزئية من $\boldsymbol{X}$ تكون مفتوحة في الفضاء المتري و بالتالي $\tau = P(X) \subseteq \tau_d \subseteq P(x) = \tau$

$$\Longrightarrow \tau = \tau_d$$

تمرين : ليكن (X,d) فضاءً مترياً و لتكن $A,B \subseteq X$ ، عندئذٍ أثبت أن :

١- $A \subseteq B \Longrightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

٢- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

٣- $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

ثم هات مثال على عدم تحقق المساواة في (٣)

الحل : بدايةً لنتذكر أن لصاقة A **و** التي نرمز لها بالرمز $\bar{A}$ ، هي تقاطع كل المغلقات التي تحوي $\boldsymbol{A}$

١- ليكن $A \subseteq B$ و F مغلقة تحوي المجموعة A عندئذٍ :

$$A \subseteq B \subseteq F \Rightarrow A \subseteq F$$

و بالتالي $\bar{A} \subseteq F$ ((وفي ذلك دليل أن $\bar{A}$ محتواة في أي مغلقة تحوي B))

و لكن أحد المغلقات التي تحوي B هي المجموعة $\bar{B}$ و بالتالي $\boxed{\bar{A} \subseteq \bar{B}}$

٢- لنلاحظ أن :

$$\left.\begin{matrix} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{حسب } 1]{} \begin{cases} \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B} \\ \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \end{cases} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \dots (\mathbf{1})$$

من جهة أخرى :

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \bar{A} \\ B \subseteq \bar{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \subseteq \underbrace{\bar{A} \cup \bar{B}}_{A\cup B \text{ مغلقة تحوي}}$$

و لكن لصاقة $A \cup B$ أي $\overline{A \cup B}$ هي أصغر مغلقة تحوي $A \cup B$ (بالنسبة للاحتواء) وبالتالي :

$$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B} \ldots\ldots (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن : $\boxed{\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}}$

٣- بشكل مشابه ، نكتب :

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{array}\right\} \underset{1 \text{ حسب}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \\ \overline{A \cap B} \subseteq \bar{B} \end{array}\right. \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

و العلاقة هنا فقط احتواء و ليست مساواة ، و بالتالي يوجد مثال معاكس يثبت أن $\overline{A \cap B}$ و $\bar{A} \cap \bar{B}$ مجموعتان غير متساويتين بالضرورة .

لنأخذ الفضاء $X = \mathbb{R}$ و تابع المسافة المألوف على $\mathbb{R}$ (تابع القيمة المطلقة) ، ففي الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |.|)$ لنأخذ $A = [-1,0[\,,\ B =]0,1]$ ، فيكون $\bar{A} = [-1,0]\ \&\ \bar{B} = [0,1]$:

$$\emptyset = \bar{\emptyset} = \overline{A \cap B} \subsetneq \bar{A} \cap \bar{B}$$

مثال معاكس آخر : ليكن $(\mathbb{R}^2, d)$ و لنأخذ :

$$B = [1,2] \times I \quad , A = I \times I \setminus \left\{(1, y) : 0 \le y \le \frac{1}{2}\right\}$$
$$\bar{B} = \{1,2\} \times I \quad , \bar{A} = I \times I$$
$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\} \times I$$
$$A \cap B = \{1\} \times \left]\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow \overline{A \cap B} = \{1\} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subsetneq \bar{A} \cap \bar{B}$$

أصدقائي حرصاً على الدقة .. نعتذر أولاً عن ورود بعض الأخطاء في المحاضرات السابقة(النظري) و سنحاول تلافي هذه الأخطاء من خلال التصويبات التالية :

موقع الخطأ	الخطأ	الصواب
المحاضرة ١- عملي – ص٢ السطر ١٥	$2\lvert a_1b_2\rvert\lvert a_2b_1\rvert \le \lvert a_1b_1\rvert^2 + \lvert a_2b_2\rvert^2$	$2\lvert a_1b_2\rvert\lvert a_2b_1\rvert \le \lvert a_1b_2\rvert^2 + \lvert a_1b_2\rvert^2$
المحاضرة ٦-نظري –ص٥- السطر قبل الأخير	$\Leftrightarrow Bx \in B \subseteq A^c$	$\Leftrightarrow x \in B \subseteq A^c$

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش –نذير تيناوي