فريق رياضيات

المحاضرة (١٥) ن — ٢/٥/٢٠١٧

٣ تحليل المتجهات ومبادئ الهندسة التفاضلية ع٤

ملاحظة:

$$\vec{ok} = \vec{oM} + \rho \vec{N}$$

$$\vec{N}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$

$$(x_k, y_k, z_k) = (x_0, y_0, z_0) + \rho(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_0 + \rho\alpha_1 \\ y_k &= y_0 + \rho\beta_1 \\ z_k &= z_0 + \rho\gamma_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

أوجد ρ اذا علمت الرمز $\rho = \dfrac{x_k - x_0}{\alpha}$

$y = f(x)$ مشتق الدالة $y' = \dfrac{dy}{dx}$

dy في التفاضل

تفاضل	تغير
مشتق	معدل تغير

$\dfrac{dy}{dx} = y'$ التفاضل

معدل التغير $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

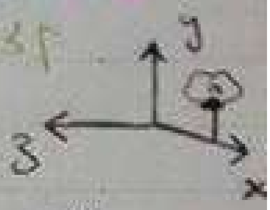
لأي نقطة (غير معينة) $\Leftarrow$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = ميل القاطع هو المستقيم الذي يقطع المماس

نقطة معينة $\Leftarrow$ $\dfrac{dy}{dx}$ = ميل المماس

الحقول العددية والحقول المتجهية

الحقل العددي: الحقل العددي هو تابع $f: D \subseteq R^3 \longrightarrow R$

هو تابع نقطي ذاتي تابع للموضع $M \to F(M) = F(x, y, z)$



الحقل المتجهي هو تابع متجهي في الشكل $F: D \subseteq R^3 \to R$

$$M \to \vec{F}(M)$$

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

1) التدرج والمشتق المنحني لتابع عددي :

نعرف المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ (نابلا - دلتا)

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{dx}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{dy}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{dz}\right)\vec{k}$$

وقد يؤثر على حقل عددي او حقل متجهي

2) التدرج تابع عددي وسطوح السوية :

نعرف تدرج التابع العددي $f = f(x,y,z)$ والذي نرمز له بـ $\overrightarrow{grad}\, f$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{df}{dx}\vec{i} + \frac{df}{dy}\vec{j} + \frac{df}{dz}\vec{k}$$

مثال

$$f = x^2 \cdot y \cdot z^3$$

أوجد $\overrightarrow{grad}\, f$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{df}{dx}\vec{i} + \frac{df}{dy}\vec{j} + \frac{df}{dz}\vec{k}$$

$$= 2xyz^3\,\vec{i} + x^2 z^3\,\vec{j} + 3x^2 y z^2\,\vec{k}$$

عند $M_0(1,1,1)$

$$\overrightarrow{grad}\, f_{M_0} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

♥ مشتق الاتجاهي لتابع عددي :

$f = f(x,y,z)$ حقلاً "عددياً" او $f = f(M)$

Δ محور شعاعي $\vec{u}$ شعاع الواحدة له حيث $\vec{u}(l,m,n)$

$M(x,y,z)$

$M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$

نعرف المشتق الاتجاهي لتابع عددي f عند النقطة M في الاتجاه المعين بشعاع الواحدة $\vec{u}$ عند النقطة M بالعلاقة

$$\frac{df}{d\vec{u}} = \lim_{M_1M \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|M_1M|}$$

وهو يمثل معدل تغير f عند M في الاتجاه $\vec{u}$

$$\frac{df}{du} = L\frac{df}{dx} + M\frac{df}{dx} + n\frac{df}{dz}$$

نتيجة 1) من أجل $\vec{i} = \vec{u}$

$$\vec{i}(1,0,0)$$

$$\frac{df}{d\vec{i}} = \frac{df}{d\vec{u}} = \frac{df}{dx}$$

نتيجة 2)

$$\frac{df}{d\vec{u}} = (\text{grad} f)\cdot\vec{u}$$

مثال: أوجد المشتق الاتجاهي للحقل $f = 2x^2 + y^3 + z^2$ عند M

ثم من أجل $M_0(1,2,3)$ وذلك في الاتجاه

M_0 إلى M_1 حيث $M_1(3,5,0)$

$$\frac{df}{du} = l\frac{df}{dx} + m\frac{df}{dy} + n\frac{df}{dz}$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_0M_1}}{|\overrightarrow{M_0M_1}|} = \frac{(2,3,-3)}{\sqrt{22}}$$

$$\frac{df}{du} = \frac{2}{\sqrt{22}}4x + \frac{3}{\sqrt{22}}2y - \frac{3}{\sqrt{22}}2z$$

$$\frac{df}{d\vec{u}} = \frac{8}{\sqrt{22}} + \frac{12}{\sqrt{22}} - \frac{18}{\sqrt{22}} = \frac{2}{\sqrt{22}}$$

ملاحظة: $\frac{df}{du}$ هو معدل تغير التابع f باتجاه $\vec{u}$ عند نقطة منه وتختلف باختلاف اتجاه $\vec{u}$ وهذا المعدل يكون أعظمياً عندما يكون يكون باتجاه التدرج $\text{grad} f$ وقيمة الحد الأعظمي هو طول التدرج عند النقطة M

سؤال: في أي اتجاه عند النقطة $M_0(2,1,-1)$ يكون المشتق الاتجاهي للحقل العددي

$$f = x^2 y z^3$$

إعداد جيهان مصطفى

فريق سيريامات