الرياضيات المتقدمة.

المحاضرة الأولى: مسألة: تقوم شركة بإنتاج نوعين من الأدوات الكهربائية الربح بالقطعة الواحدة من النوع الأول 80 ألف ل.س والربح بالقطعة الواحدة من النوع الثاني 100 ألف ل.س.

تحتاج القطعة الواحدة من النوع الأول إلى 1 م² من الزجاج وإلى 3 م² من الحديد. وتحتاج القطعة الواحدة من النوع الثاني إلى 2 م² من الزجاج وإلى 1 م² من الحديد. تشتري الشركة 10 م² من الزجاج و 14 م² من الحديد أسبوعياً.

والمطلوب: تحديد خطة الإنتاج أسبوعياً لتحقيق أكبر ربح.

الحل:

يوجد لدينا متحولين (نوع أول، نوع ثاني) حيث نرمز x_i عدد القطع المنتجة من النوع i.

$f(x_1,x_2)$

الهدف: تحقيق أكبر ربح أي: $Max\ F(x_1,x_2) = \boxed{80x_1+100x_2}$ الربح

دالة الهدف

شروط المسألة: بأقل حد من الإنتاج

الأول: شرط الزجاج $x_1+2x_2 \le 10$

الثاني: شرط الحديد. $3x_1+x_2 \le 14$

ملاحظة / وشرط عدم السلبية $x_1+x_2 \ge 0$; $x_1+x_2 \in Z$

النموذج الرياضي من الشكل:

$$Max\ f(x_1,x_2) = Max\ 80x_1+100x_2$$

سؤال

شرط. s.t
$$x_1+2x_2 \le 10$$
$$3x_1+x_2 \le 14$$
$$Z \ni x_1+x_2 \ge 0.$$

نقسم الحل إلى جزئين: الأول الحل الحقيقي نعتمد الرسم البياني لأن الحل الحقيقي ليس الهدف من المتقدمة.

نرسم منطقة الحلول ونحدد أكبر منطقة من المستوى لتوصل للهدف.

1- نرسم المستقيم $x_1+2x_2=10$ ونحدد المكان من مستوى أصغر أو يساوي 10 ونرسمه.

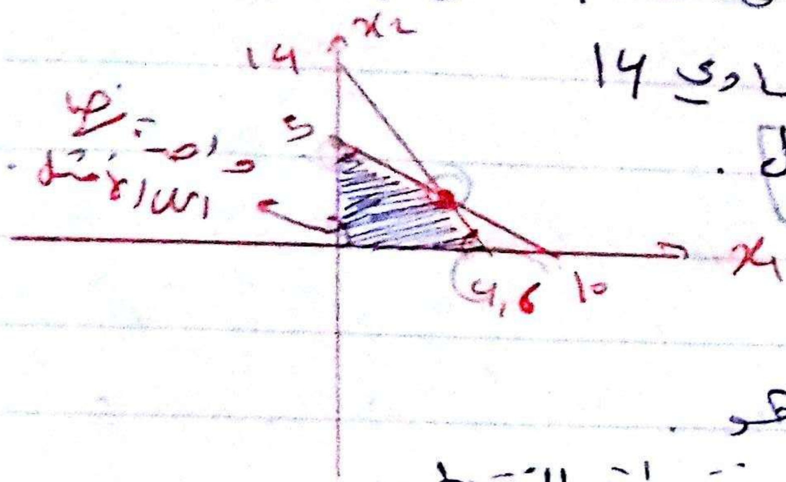
رسم المستقيم نفرض نقطتين

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10$

2 نرسم المستقيم $3x_1 + x_2 = 14$

$x_2 = 14 \Rightarrow x_1 = 4,6$



نحدد المكان من المستوي بحيث يكون اصغر او يساوي 14

وهنا نستخدم السلبية فانه الرسم في الربع الاول.

الحل الأمثل هو الذي يحقق الهدف:

$$Max\ f(x_1, x_2) = 80x_1 + 100x_2$$

وهو احد زوايا منطقة الحلول وهنا هو.

اما $(0,0)$ أو $(0,5)$ أو $(4,6,0)$ أو نقطة التقاطع

- أكبر قيمة للهدف عند احد النقاط هو الحل الحقيقي. نقطة التقاطع هو الحل المشترك لمعادلتي المستقيمين. $x_1 + 2x_2 = 10$ $3x_1 + x_2 = 14$

$x_1 = 10 - 2x_2 \Rightarrow 3(10 - 2x_2) + x_2 = 14$

$\Rightarrow x_2 = 3,2 \quad x_1 = 3,6$

نقطة التقاطع $(3,6 , 3,2)$ بتعويض النقاط في دالة الهدف نجد

$F(0,0) = 0$

$F(0,5) = 500$

$F(4,6,0) = 573,3$ ، $F(3,6 , 3,2) = 608$

ومنه الحل الأمثل الحقيقي هو $x_1 = 3,6$ $x_2 = 3,2$

بربح مبلغ وقدره 608 الف دينار ولكن هذا الحل لا يفيد الشركة لذلك نلجأ إلى الحل الصحيح وذلك لأنه لا يمكن انتاج 3,6 أو 3,2 قطعة كهربائية. لكي تكون من عدد صحيح أي الحل الصحيح

• طريقة الاستبدال (الحل الصحيح): ناخذ العدد الأكبر من الحل الحقيقي مثلا

(* (4,4) القيم الأكبر لنقطة التقاطع نعوض في الشروط

$(4,3)$ اذا تحقق الشروط نتوقف

$(3,4)$ نتوقف لانه يحقق الشروط

أكمل بهذه الطريقة حتى يكون كل انتاج صح

$(2,4)$ — $(3,3)$ — $(4,2)$

$F(2,4) = 560$ $F(3,3) = 540$ $F(4,2) = 520$

/ /

الحل الأمثل الصحيح هو $x_1=2, x_2=4$
وقيمة دالة الهدف هو 560 ألف ل.س وهو الحل المناسب للشركة.

المحاضرة الثانية: مبادئ العد العامة وتطبيقاتها:

معظم مسائل العد تؤول إلى إحدى المسائل:

1. مقارنة مجموعة عددها معلومة.
2. حساب عدد عناصر مجموعة ناتجة من اجتماع عدد من المجموعات.
3) حساب عدد عناصر الجداء الديكارتي لعدة مجموعات.

* تعريف: قدرة مجموعة منتهية: هو عدد عناصر هذه المجموعة ونرمز لها إما $\mathrm{Card}(A)$ أو $|A|$

/ ملاحظة خارجية: إذا كانت شركة تنتج من 0 ← 10 سيارات فمنطقة الحلول تكون ضمن $\frac{Z}{10Z}$ //

• مبدأ العد الأول:

إذا وجد تقابل بين مجموعتين A و B فإن $|A|=|B|$

// بالنسبة للرمز نقول تماثل $A\cong B$ //

• مبدأ العد الثاني:

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية ومنفصلة مثنى مثنى أي التقاطع كل مجموعتين منها يساوي الخالية أي $A_i\cap A_j=\emptyset$; $(i\neq j)$ فإنه:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

((عدد عناصر الاجتماع يساوي مجموع عدد عناصر المجموعات)).

• مبدأ العد الثالث:

لتكن $A_1, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية فإنه: $|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n| = \prod_{i=1}^{n}|A_i|$

$$= |A_1|\times|A_2|\times\ldots\times|A_n|$$

فإذا كان $(x_1, x_2)\in A_1\times A_2 \Leftarrow |A_1\times A_2|=|A_1|\times|A_2|$

// بشكل عام //

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3| - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - |A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_3|$$

((إذا كان عدد المجموعات فردي نجمع وإذا كان زوجي نطرح)).

أمثلة: ① القاء قطعة نقود 3 مرات متتالية فإن عدد النتائج الممكنة

$A = \{T, H\} \Leftarrow |A| = 2 \Leftarrow 2 \times 2 \times 2 = 8$

((حسب المبدأ الثالث بالجداء الديكارتي)).

② نفرض أننا نريد تصنيف مجموعة من الأشخاص وفقة لحالتهم المدنية (متزوج أو أعزب) وجنسهم (ذكر أو أنثى) ومهنهم (إذا أن هناك 20 مهنة) فنجد أن عدد الأصناف الممكنة هو: $2 \times 2 \times 20 = 80$

③ ليكن a عدد طبيعي قواسمه الأعداد الأولية: $d_1, d_2, \dots, d_k$

وأن $a = d_1^{m_1} \times d_2^{m_2} \times \dots \times d_k^{m_k}$ ، ما هو عدد قواسم العدد a.

$12 = 2^2 \times 3$ $\quad (2^0, 3^0)\ (2^1, 3^0)\ (2^2, 3^0)\ (2^0, 3^1)$

$(2^1, 3^1)\ (2^2, 3^1)$

// عدد القواسم // $(m_1+1) \times (m_2+1) \times \dots \times (m_k+1)$

أسس القواسم الأولية.

بالتالي عدد قواسم 12 هو: $(2+1)(1+1) = 6$

تمرين: ما هو عدد قواسم $2520 = 3^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$= (3+1)(3+1)(1+1)(1+1) = 64$

// ملاحظة: نبدأ بالأعداد الأولية كل الأعداد أولية //

مثال: لنفرض مدرسة فيها 3 مقررات مختلفة للتاريخ و 4 مقررات مختلفة للقراءة و 2 مقررات مختلفة للإحصائيات.

① ما هو عدد الطرق لاختيار طالب ما لمقرر واحد من كل نوع.

② " " " " لمقرر واحد من هذه المقررات

الحل: ① عدد الطرق المختلفة: $3 \times 4 \times 2 \Leftarrow$ (تاريخ، قراءة، إحصائيات)

② مقرر واحد من هذه المقررات بالتالي إما قراءة أو تاريخ أو إحصائيات

وهي أحداث منفصلة $\Leftarrow 3 + 4 + 2$.

* العينات المرتبة:

إذا كانت A مجموعة بها n عنصر و r عدد طبيعي نرمز له $(x_1, x_2, \dots x_r)$ من A^r بعينة مرتبة حجمها r مأخوذة من المجموعة A حيث $|A| = n$

نميز حالتين:

ما هذا يا سماح

أنشودة الحضارة

/ /

عدد القوة الخاصة

① - أننا نعيد إلى A كل عنصر أخذناه بعد تسجيله ويكون عدد العينات المرتبة: $|A|^r = n^r$.

② - أننا لا نعيد إلى A العنصر المأخوذ: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

((لماذا يوجد +1 في القانون؟ لأنه بدأنا العد من n فيجب أن يكون مجموع حدود r)).

مثال: إذا كانت $|A|=10$ وكان السحب بدون إعادة وأردنا 3 عناصر مرتبة (x_1, x_2, x_3) ← يكون عدد الطرق الممكنة $10\times 9\times 8 = (10)(10-1)(10-2)$

• **التراتيب:** تسمى مجموعة العناصر السابقة بترتيب n عنصراً مختلفاً من r مكان ويرمز لها ب P^n_r .

$$P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)\times(n-r)!}{(n-r)!}$$ (أبعد للقانون السابق)

مثال: كم طريقة يمكن أن نسحب ثلاث أوراق على التتالي من مجموعة أوراق اللعب في الحالتين: ① - السحب مع الإعادة، ② - السحب بدون إعادة.

الحل: ① - عدد الأوراق 52 ← عدد الطرق $(52)^3$

② $$P^{52}_3 = \frac{52!}{(52-3)!} = 52\times 51\times 50$$

• **التوافقات:** إنه كثيراً من المواقف في العد تقتضينا أن لا نقيم اعتباراً لترتيب العناصر. إذا كان لدينا مجموعة A عدد عناصرها n وأردنا مجموعة جزئية منها (مجموعة عناصرها r) فنقول عن هذا إنه توافقة حجمه r مأخوذ من A ونرمز له ب

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,(r!)}$$

مثال: كم طريقة يمكن توزيع 13 ورقة لاعب من مجموعة أوراق اللعب.

$$\binom{52}{13} = \frac{52!}{(52-13)!\times 13!} = 635\times 10^9$$

(العدد الحالات المختلفة).

المحاضرة الثالثة . التجزئة : * تجزئة مجموعة الى عدة مجموعات (أجزاء منفصلة مثنى) :

لنفرض أنه A مجموعة معينة عدد عناصرها n وأنه $r_1, r_2, \ldots, r_n$ أعداد طبيعية تحقق $r_1+r_2+\ldots+r_n=n$ فيمكن تجزئة A الى n مجموعة $A_1, A_2, \ldots, A_n$ بحيث $|A_i|=r_i$ و $i=1,\ldots,n$.

فعدد الطرق لاختيار الأجزاء A_i يساوي :

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \ldots \times r_n!}$$

• مثال: لو كان عندنا 10 وأردنا تقسيمها الى 4 ، 3 ، 3 فإنه :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} \qquad \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \times 3!} \qquad \binom{4}{4} = \frac{4!}{0! \times 4!}$$

((لنبين كيف نتج القانون السابق))

$$\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{4} = \frac{10!}{3! \times 3! \times 4!}$$

مثال: كم طريقة يمكن توزيع 7 جوائز على ثلاث أطفال إذا كنا نريد أنه نعطي الطفل الأول 3 جوائز والثاني 2 جائزة والثالث 2 جائزة)

$$\binom{7}{2\ \ 2\ \ 3} = \frac{7!}{2! \times 2! \times 3!}$$

// ملاحظة: إذا لم يتحقق شرط أنه مجموع التجزئة يساوي العدد الكلي فنعود للقانون التوافيق القانون السابق لا يصلح بهذه الحالة //

مثال: أوجد عدد تباديلات الأحرف المختلفة الموجودة في كلمة :

/ هنا المطلوب بالسؤال عدد الكلمات المختلفة للكلمة

s t a t i s t i c a l

s: 2 ، t: 3 ، a: 2 ، i: 2 ، c: 1 ، l: 1

عزنا وأضفنا عدد الأحرف الكلي 11 //

$$\binom{11}{3\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1} = \frac{11!}{3! \times (2!)^3}$$

عدد تكرارات الأحرف المختلفة

/ /

مثال: كم طريقة يمكن توزيع ورق اللعب على أربع لاعبين بالتساوي.

$$\binom{52}{13\ \ 13\ \ 13\ \ 13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

مثال: أوجد عدد الكلمات المختلفة الممكن تشكيلها من أحرف الكلمات.

① those

② unusual

③ sociological

$\frac{7!}{3!}$ $\quad \frac{12!}{3!\,2!\,2!\,2!}$

الحل: ① $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

② ترتيب 7 أماكن عدد أماكن حرف u $= \frac{7!}{3!}$

③ $\frac{12!}{3!\,(2!)^3}$

تمارين: ① أوجد عدد الطرق لتنظيم 7 أشخاص لانتظامهم

(a) في صف من الكراسي

(b) حول طاولة مستديرة.

الحل: (a) $7!$ ، (b) يوجد ثابت دائم للترتيب حول شخص مشترك $(7-1)!$

ملاحظة: توزيع n شيء بشكل دائري يتم بـ $(n-1)!$ طريقة

[2] يوجد في صف 8 طلاب أوجد عدد العينات من الحجم 3 إذا كان:

① السحب مع إعادة.

② السحب دون إعادة.

الحل: ① 8^3 . ② $8 \times 7 \times 6$.

[3] أوجد n حيث $P^n_2 = 72$.

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 72 \Rightarrow n(n-1) = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$
$$\Rightarrow (n-9)(n+8) = 0 \Rightarrow n = 9$$

(نأخذ الجواب الموجب).

[4] يحوي صف مع 10 طلاب منهم 6 رجال، 4 نساء أوجد عدد الطرق.

/ /

[illegible] من الطلاب.

a - اختيار 4 أعضاء لجمعية [illegible]

b - اختيار 4 أعضاء لجمعية نزهوا رجلان وامرأتان.

c - اختيار رئيس ونائب رئيس للجمعية وأمين صندوق.

الحل:

a - $\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!\,.\,4!}$

b - $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

c - $P^{10}_{3} = 10 \times 9 \times 8.$ (ترتيب)

المحاضرة الرابعة: * معاملات ثنائي الحد ومثلث باسكال:

ملاحظات: ① $0! = 1$ اصطلاحاً. ② $1! = 1$

③ - $\binom{n}{0} = 1$ ④ - $\binom{n}{1} = n$ ⑤ - $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

من n نعرف اختيار شيء [illegible]

⑥ - $\binom{n}{n} = 1$ ⑦ - $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

* نظرية (ثنائي الحد): $\forall a, b \in \mathbb{R}$ لكل أي عنصرين حقيقيين a, b فإن: (مفكوك نيوتن) //

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}}$$

ملاحظة: أمثال الحدود في مفكوك نيوتن يمكن ترتيبها في مصفوفة أعداد مثلثية تدعى مثلث باسكال.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

من ترتيب مثلث باسكال ← $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

لأن $(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k \, b^{4-k}$.

تمرين للامتحان: ما هو معامل الحد $x^{12} y^{13}$ في مفكوك $(2x-3y)^{25}$

$\boxed{}$ $(2x)^{12}(-3y)^{13}$ $K=12$ $n=25$

$$\binom{n}{k}\cdot(2x)^k(-3y)^{n-k} = \binom{25}{12} 2^{12} (-3)^{13} x^{12} y^{13} = \frac{25!}{(25-12)!\,12!} 2^{12} (-3)^{13} x^{12} y^{13}$$

معامل الحد المطلوب.

تمرين: برهن أنه: ① $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ ② $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$

البرهان:

① نفرض $a=1$, $b=1$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n} = 2^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Rightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^{n-k}(1)^k$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

② حسب منشور نتائج صيغة نيوتن:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1)^{n-k}.$$

③ برهن أنه: (1) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots+\binom{n}{n}$ زوجي

$$(2) = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots\binom{n}{n-1} = 2^{n-1}\ (3)$$

فردي

الحل: نجمع ① و ② لأنه الحدود الفردية بالتوافيق مسبوقة بـ سالب

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots = 0 + \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}$$

$$2\binom{n}{0}+2\binom{n}{2}+\dots = 2^n$$

بالتسيم على 2 نحصل المطلوب أنه (1) = 3)

حتى أنه نحصل على (2) = (1 فوراً من تمرين ② ننقل السالب للطرف الثاني.

بطرح ② من ①

$$2\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+\dots = 2^n.$$

بالتسيم على 2 نحصل المطلوب.

تمرين: برهن أنه: $\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^n$ هنا $a=1$, $b=2$

/ /

* نظرية (متطابقة باسكال): نفرض n و k أعداد طبيعية وكان $1 \le k \le n$ فإن:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

((شاهد برهانها في ميثوتن)).

* نظرية (متطابقة فاندرموند): نفرض n و m و r أعداد طبيعية حيث $\boxed{r \le n, m}$ فإن:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}.$$

تمرين: برهن أنه:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

البرهان: نستخدم فاندرموند، $m=n$, $r=n$

$$\binom{n+n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{n-k} \cdot \binom{n}{k}}_{\text{متساويين}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

* برهان منشور نيوتن:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \, b^{n-k}$$

البرهان: البرهان حسب الاستقراء الرياضي:

نبرهن العلاقة من أجل $n=1 \Leftarrow$

$$(a+b) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k \cdot b^{1-k}$$

$$= 1b + 1a$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n ونبرهن صحتها لأجل $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \, b^{n+1-k}.$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = (a+b) \cdot \Big[a^n + \binom{n}{1} b^{n-1} \cdot a + \dots$$

$$+ \binom{n}{r-1} b^{n-r+1} a^{r-1} + \binom{n}{n-1} \cdot b \, a^{n-1} + b^n \Big]$$

• إن الحد الذي يحوي a^r [illegible]:

$$b \cdot \left[\binom{n}{r} b^{n-r} a^r \right] + a \left[\binom{n}{r-1} b^{n-r+1} a^{r-1} \right]$$

$$= a^r \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \right] b^{n-r+1} = \binom{n+1}{r} a^n b^{n-r+1}$$

(الحد العام)

وبالتالي العلاقة محققة وهو المطلوب.

/ /

الحاجة الخامسة: • الزمرة: لتكن $<G, \sim>$ بنية جبرية مجموعة غير خالية مع

لكن G مزودة بقانون ثنائي ($\sim$) تحقق:

① $\sim$ مغلقة في G ② $\sim$ تجميعية في G ③ يوجد محايد e

④ لكل عنصر نظير.

مثال: $<\mathbb{R}^*, *>$ زمرة. بينما $<\mathbb{Z}^*, *>$ ليست زمرة.

ملاحظة: تكون الزمرة $<G, \sim>$ زمرة تبديلية إذا كانت $\sim$ تبديلية في G.

ملاحظة: يمكن برهان أن البنية فقط ما هي زمرة باستخدام جدول كايلي.

مثال: هل $<A, \sim>$ زمرة؟ حيث $A = \{0,1,2\}$,

$x \sim y = x + y + 2 \in \mathbb{Z}$.

$\sim$	0	1	2
0	2	3	4
1	3	4	5
2	$\cancel{3}$4	5	6

من الجدول $\sim$ ليست مغلقة في A

$\Leftarrow$ ليست زمرة.

• بالنسبة لـ $<\mathbb{Z}, \sim>$ ؟؟

إن $<\mathbb{Z}, \sim>$ زمرة لأن:

① $\sim$ مغلقة في $\mathbb{Z}$ لأن: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ $x \sim y = x+y+2 \in \mathbb{Z}$

② $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$: $(x \sim y) \sim z = (x+y+2) \sim z =$

$(x+y+2)+z+2 = x+y+z+4$

& $x \sim (y \sim z) = x \sim (y+z+2) = x+(y+z+2)+2$

$= x+y+z+4 \Rightarrow$ $\sim$ تجميعية في $\mathbb{Z}$.

③ المحايد: $\forall x \in \mathbb{Z}$; $x \sim e = e \sim x = x$

يوجد في $\mathbb{Z}$ محايد بالنسبة لـ $\sim$: $x+e+2 = x \Rightarrow e = -2$

④ النظير: $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}; x \sim y = y \sim x = e$

$x+y+2 = e = -2 \Rightarrow y = (x)^{-1} = -x-4$

$x \sim x^{-1} = x^{-1} \sim x = x+(x)^{-1}+2 = x+(-x-4)+2 = -2 = e$.

مثال: لتكن $A = \{a,b\}$ هل البنية $<P(A), \Delta>$ زمرة ولماذا؟

الفرق التناظري مجموعة أجزاء A

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$A \oplus B = A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$.

Δ	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

// العناصر موجودة في الأولى وغير موجودة بالثانية اجتماع
العناصر الموجودة بالثانية وغير موجودة بالأولى

. مغلقة في الجدول . الحيادي $\emptyset$. تجميعي من الجدول . النظير كل عنصر هو نظير نفسه
(النظير هو مكان ظهور الـ $\emptyset$).

تمرين (وظيفة): برهن أنه $\langle M, \Delta \rangle$ زمرة مهما كانت M مجموعة شاملة
وجزئية الاجتماع والتقاطع لأجل المجموعة A.

// المجموعة الشاملة: هي مجموعة كل المجموعات:

$\forall A, B, C \in M$:

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ تجميعي

$A \Delta B \in M$ داخلي ، $\forall A \in M;\ \exists e \in M: A \Delta e = A$ (حيادي)

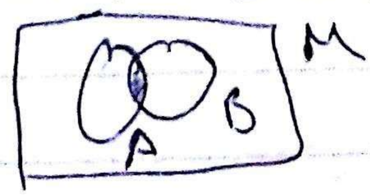
$\forall A \in M,\ \exists F: A \Delta F = e$ (النظير).

. بين هل $\langle P(A), \cap \rangle$ حيث $A = \{a,b\}$ (وظيفة)

. $\langle M, \cap \rangle$ هل هي زمرة؟

① من تعريف الشاملة M $\forall A, B \in M;\ A \cap B \in M$

② - التقاطع تجميعي



③ - الحيادي. $\forall A \in M$:

$A \cap e = A = e \cap A \Rightarrow e = M$

④ النظير: $\forall A \in M,\ \exists F \in M: A \cap F = F \cap A = e = M$

لا يوجد نظير في M بالنسبة للتقاطع $\Leftarrow$ $\langle M, \cap \rangle$ ليست زمرة.