٢ . ١٢ . معادلة لجندر التفاضلية:

Legendre Differential Equation:

٢ . ١٢ . ١ . المقدمة:

تسمى المعادلة على الشكل:

$$(1 - z^2)\, w'' - 2zw' + n\,(n + 1)\, w = 0 \qquad (1)$$

بمعادلة لجندر التفاضلية، والحل العام للمعادلة (1) يعطى بالعلاقة:

$$w = C_1 P_n(z) + C_2 Q_n(z) \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

حيث $P_n(z)$ كثيرات حدود تسمى كثيرات حدود لجندر من النوع الأول بينما $Q_n(z)$ تسمى دوال لجندر من النوع الثاني وهي غير محدودة عندما $z = \pm 1$ وهما حلان مستقلان للمعادلة (1).

ولحل المعادلة (1) في شكل متسلسلة، نجد أن:

$z = 0$ نقطة عادية لذلك نفرض أن الحل على الشكل الآتي:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

ويكون لدينا:

$$w' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k z^{k-1} \quad , \quad w'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) z^{k-2}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) z^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) z^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1) a_k z^k = 0$$

بمساواة مجموع معاملات z^{k-2} بالصفر، أي بالمطابقة نحصل على:

$$\therefore a_k k(k-1) - a_{k-2}(k-2)(k-3) - 2a_{k-2}(k-2) + n(n+1)a_{k-2} = 0$$
$$\therefore a_k k(k-1) - a_{k-2}\left[(k-2)(k-1) - n(n+1)\right] = 0$$
$$\therefore a_k k(k-1) = -a_{k-2}\left[n^2 + n - (k-2)(k-1)\right]$$

العلاقة التكرارية:

$$a_k = -\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{k(k-1)} a_{k-2} \quad , \quad k \geq 2$$

ومن هذه العلاقة، وباعتبار $a_1 \neq 0$, $a_0 \neq 0$ اختياريتين يمكن حساب جميع المعاملات بدلالة كل من a_1 , a_0.

١. $a_0 \neq 0$ اختيارية:

$$\therefore a_2 = \frac{-n(n+1)}{(2)(1)} a_0 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{(4)(3)} a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0$$

$$a_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{(6)(5)} a_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} a_0, \ldots$$

٢ . $a_1 \neq 0$ اختيارية:

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{(3)(2)} a_1 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{(5)(4)} a_3 = \frac{(n-3)(n+1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1$$

$$a_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{(7)(6)} a_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} a_1, \ldots$$

على ذلك، يكون الحل العام على الشكل:

$$w = a_0\{1 - \frac{(n+1)}{2!} z^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} z^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} z^6 + \ldots\} +$$

$$a_1\{z - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} z^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} z^5 - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} z^7 + \ldots\}$$

$$w = a_0 w_1(z) + a_1 w_2(z)$$

من الواضح إذا كان n عدداً صحيحاً، فإن إحدى المتسلسلتين $w_1(z), w_2(z)$ سوف تكون منتهية (أي تكون محدودة) بمعنى أن تكون كثيرة حدود من درجة n ويرمز لها بالرمز $P_n(z)$ بينما المتسلسلة الأخرى تكون لا نهائية ويرمز لها بالرمز $Q_n(z)$.

فإذا كانت n عدداً زوجياً، فإن $w_1(z) = P_n(z)$ وتكون $P_n(z)$ دالة كثيرة حدود زوجية بينما $w_2(z) = Q_n(z)$ متسلسلة لا نهائية.

أما إذا كانت n عدداً فردياً فإن $w_1(z) = Q_n(z)$ متسلسلة لا نهائية بينما $w_2(z) = P_n(z)$ دالة كثيرة حدود فردية.

ويكون الحل العام:

$$w = c_1 P_n(z) + c_2 Q_n(z)$$

وذلك إذا كانت n عدداً صحيحاً.

وإذا اخترنا $a_0 = a_1 = 1$ بحيث يكون معامل z^n هو:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

فإن:

$$P_n(z) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} z^{n-2m}$$

حيث: $M = \dfrac{n}{2}$ إذا كان n عدداً زوجياً و $M = \dfrac{n-1}{2}$ إذا كان n عدداً فردياً.

٢ . ١٢ . ٢ . صيغة رودريج: **Rodrigue**

يمكن التعبير عن كثيرات حدود لجندر $P_k(z)$ بالصيغة التالية، وتسمى صيغة رودريج:

$$P_k(z) = \frac{1}{2^k . k!} \frac{d^k}{dz^k} (z^2 - 1)^k$$

الإثبات:

نعلم أن:

$$\frac{d^k}{dz^k} z^{2k-2n} = (2k-2n)(2k-2n-1)\ldots(k-2n+1) z^{k-2n}$$

$$\frac{d^k}{dz^k} z^{2k-2n} = \frac{(2k-2n)(2k-2n-1)\ldots(k-2n+1)(k-2n)!}{(k-2n)!} z^{k-2n}$$

$$= \frac{(2k-2n)!}{(k-2n)!} z^{k-2n}$$

وإذا عدنا إلى حدودية لوجندر نجد أن:

$$p_k(z)=\sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{2^k n!(k-n)!dz^k}\frac{d^k}{dz^k}z^{2k-2n}$$

$$p_k(z)=\frac{d^k}{dz^k}\sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{2^k n!(k-n)!}z^{2k-2n}$$

$$p_k(z)=\frac{d^k}{dz^k}\sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n k!}{2^k k!n!(k-n)!}z^{2k-2n}$$

$$p_k(z)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dz^k}\sum_{n=0}^{p}(-1)^n\binom{k}{n}z^{2k-2n}$$

ولنلاحظ هنا أنه يمكننا تغيير الحد الأعلى للمجموع ونضع k بدلاً من p، وهذا لا يؤثر في المجموع، لأن مشتقاتها ستكون معدومة أي إن:

$$p_k(z)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^k \qquad (3)$$

نسمي هذه الصيغة صيغة رودريج (Rodrigue).

– ٢ . ١٢ . ٣ . الصور المختلفة لكثيرة حدود لجندر:

بوضع $n=0$ في صيغة رودريج نحصل على:

1) $P_0(z)=1$

بوضع $n=1$ نجد أن:

2) $P_1(z)=\frac{1}{2^1 1!dz}\frac{d}{dz}(z^2-1)=\frac{1}{2}(2z)=z$

بوضع $n=2$:

3) $P_2(z)=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dz^2}(z^2-1)^2=\frac{1}{8}\frac{d}{dz}\left[4z^3-4z\right]=\frac{4}{8}(3z^2-1)=\frac{1}{2}(3z^2-1)$

(الإثبات غير مطلوب)

بوضع $n = 3$:

$$4)\ P_3(z) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dz^3}(z^2-1)^3 = \frac{1}{48}\frac{d^2}{dz^2}\left[6z^5 - 12z^3 + 6z\right]$$

$$= \frac{1}{8}\frac{d}{dz}\left[5z^4 - 6z^2 + 1\right] = \frac{1}{8}(20z^3 - 12z)$$

$$\therefore P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$$

ويمكن إثبات أن:

$$5)\ P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)$$

$$6)\ P_5(z) = \frac{1}{8}(63z^5 - 60z^3 + 15z)$$

نلاحظ أن الدوال ... $P_0(z),\ P_2(z),\ P_4(z),$ زوجية، بينما الدوال $P_1(z),$ $P_3(z), P_5(z), \ldots$ فردية.

٢ . ١٢ . ٤ . الدالة المولدة لكثيرات حدود لجندر $P_n(z)$:

Generating Function for $P_n(z)$:

تكون الدالة المولدة لكثيرة حدود لجندر على الشكل الآتي:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) h^n$$

٢ . ١٢ . ٥ . الخواص الأساسية لكثيرات الحدود $P_n(z)$:

1) $P_n(1) = 1$

الإثبات:

نفرض $z = 1$ في الدالة المولدة:

$$\therefore (1-2h+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)h^n$$

$$\therefore (1-h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)h^n$$

لكن:

$$\frac{1}{1-h} = (1-h)^{-1} = 1+h+h^2+h^3+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)h^n = \sum_{n=0}^{\infty} h^n$$

أي إن:

$$P_n(1) = 1$$

2) $P_n(-1) = (-1)^n$

الإثبات:

نضع $z = -1$ في الدالة المولدة فنجد:

$$\therefore (1+2h+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)h^n$$

$$\therefore (1+h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)h^n$$

لكن:

$$(1+h)^{-1} = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \ldots + (-1)^n h^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)^n h^n$$

$$\therefore P_n(-1) = (-1)^n \Rightarrow P_n(-1) = (1)^n P_n(1)$$

وبالمثل نستطيع إثبات أن: $P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$

وذلك بوضع $-z$ بدلاً من z في الدالة المولدة.

لنضع الآن $z = 0$ فنحصل على:

$$3)\ P_n(0) = \begin{cases} 0 \quad ; & n \ \text{odd (فردية)} \\ \dfrac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2}; & n = 2m \ \text{even (زوجية)} \end{cases}$$

$(1+y)^{\alpha} : 1+\alpha y + \dfrac{\alpha(\alpha-1)y^2}{2!} + \ldots$

الإثبات:

بوضع $z = 0$ في الدالة المولدة فنحصل على:

$$\therefore (1+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)h^n = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)h^2 + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}h^4 + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}h^6 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}h^2 + (-1)^2 \frac{1.3}{2^2 2!}h^4 + (-1)^3 \frac{1.3.5}{2^3 3!}h^6 + \ldots$$

من الواضح إذا كانت n فردية فإن $P_n(0) = 0$، أما إذا كانت $n = 2m$ زوجية

فإن:

$$P_n(0) = P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{1.3.5...(2m-1)}{2^m m!}$$

$$= (-1)^m \frac{1.3.5...(2m-1)}{2^m m!} \cdot \frac{2.4...2m}{2.4...2m}$$

$$= (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$\therefore P_n(0) = \begin{cases} 0 \quad ; & n \text{ odd (فردية)} \\ \dfrac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2}; & n = 2m \text{ even (زوجية)} \end{cases}$$

– مبرهنة(١):

$$\int_{-1}^{1} f(z)P_n(z)dz = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (z^2-1)f^{(n)}(z)dz$$

– البرهان:

من صيغة رودريج وبالتكامل بالتجزئة n مرة نحصل على:

$$\int_{-1}^{1} f(z)P_n(z)dz = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f(z) \frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n dz$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[f(z) \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^2-1)^n \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^2-1)^n f'(z)dz$$

$$= \frac{1}{2^n n!}(-1)^n \int_{-1}^{1} (z^2-1)^n f^{(n)}(z)dz$$

– نتيجة (١):

$$1) \quad \int_{-1}^{1} [P_n(z)]^2 dz = \frac{2}{2n+1}$$

نتيجة (٢): $2)\ \int_{-1}^{1} P_n(z)P_m(z)dz = 0 \quad , \quad m \neq n$

وتسمى خاصة التعامد (orthogonality).

قبل إثبات هاتين النتيجتين سنحتاج إلى هذه التمهيدية.

- **تمهيدية:**

$$\int_0^{z/2} \cos^{2n+1}\theta d\theta = 2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

- **البرهان:**

حيث إن:

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1}\theta \sin^{2m-1}\theta d\theta$$

وعليه فإن:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\beta(\ell,s) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2\ell-1}\sin^{2s-1}\theta d\theta$$

$$2\ell = 2(n+1) \Rightarrow \ell = n+1, 2s-1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\beta(n+1,1/2) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{n!\Gamma(1/2)}{2(n+1/2)(n-1/2)\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}$$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

- **برهان النتيجة (١):**

من المبرهنة السابقة، بوضع:

$$f(z) = P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n}(z^2 - 1)^n$$

$$\therefore f^{(n)}(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2 - 1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\int_{-1}^{1} [P_n(z)]^2 dz = \frac{(-1)^n}{2^n (n!)} \int_{-1}^{1} (z^2 - 1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!} dz$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (1 - z^2)^n dz$$

حيث إن الدالة المكاملة زوجية.

$$\int_{-1}^{1} [P_n(z)]^2 dz = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{0}^{1} (1 - z^2)^n dz$$

نفترض أن:

$$z = \sin\theta \Rightarrow dz = \cos\theta \, d\theta$$

$$z: 0 \to 1$$

$$\theta: 0 \to \pi/2$$

$$\int_{-1}^{1} [P_n(z)]^2 dz = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta d\theta$$

$$= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{2}{2n+1}$$

- برهان النتيجة (٢):

باعتبار $m < n$ كما في النتيجة (١) فإن:

$$\int_{-1}^{1} P_m(z)P_n(z)dz = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(z^2-1)^n \frac{d^n}{dz^n}P_m(z)dz = 0$$

باعتبار $n < m$ كما في النتيجة (١) فإن:

$$\int_{-1}^{1} P_m(z)P_n(z)dz = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1}(z^2-1)^m \frac{d^m}{dz^m}P_n(z)dz = 0$$

- مثال (١):

أوجد قيمة التكامل:

$$\int_{-1}^{1} z^4 P_2(z)dz$$

الحل:

$$\int_{-1}^{1} z^4 P_2(z)dz = \frac{(-1)^2}{2^2 2!}\int_{-1}^{1}(z^2-1)^2 \frac{d^2}{dx^2}z^4 dz = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} 12z^2(z^2-1)^2 dz$$

$$= 3\int_{0}^{1}(z^6 - 2z^4 + z^2)dz = 3\left[\frac{1}{7}z^7 - \frac{2}{5}z^5 + \frac{1}{3}z^3\right]_0^1$$

$$= 3\left[\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right] = \frac{87}{105} = \frac{29}{35}$$

- مثال (٢):

أوجد قيمة التكامل:

$$\int_{-1}^{1} z^4 P_3(z)dz$$

الحل:

$$\int_{-1}^{1} z^4 P_3(z)dz = 0$$

لماذا؟.. الجواب لأن $P_3(z)$ دالة فردية.

٢ . ١٢ . ٦ . العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لجندر:

Recurrence Relations Formulae:

1) $P_{n+1}(z) = \dfrac{2n+1}{n+1} zP_n(z) - \dfrac{n}{n+1} P_{n-1}(z)$

2) $P_n(z) + 2zP'_n(z) = P'_{n+1}(z) + P'_{n-1}(z)$

3) $P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z) = (2n+1)P_n(z)$

4) $zP'_n(z) = P'_{n-1}(z) + nP_n(z)$

الإثبات:

العلاقة الأولى: حيث إن الدالة المولدة تعطى بالعلاقة:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)h^n$$

بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى h، فنحصل على:

$$-\frac{1}{2}(1-2zh+h^2)^{-3/2}(-2z+2h) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)h^{n-1}$$

$$\therefore (z-h)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)h^n = (1-2hz+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)h^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} zP_n(z)h^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)h^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)h^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2znP_n(z)h^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z)h^{n+1}$$

بمساواة معامل h^n في الطرفين فنحصل على:

$$zP_n(z) - P_{n-1}(z) = (n+1)\,P_{n+1}(z) - 2nP_n(z) + (n-1)P_{n-1}(z)$$

$$\therefore (n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)zP_n(z) - nP_{n-1}(z)$$

$$\therefore P_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{n+1} zP_n(z) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(z)$$

العلاقة الثانية:

بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى z فنحصل على:

$$-\frac{1}{2}\left(1-2zh+h^2\right)^{-3/2}(-2h) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(z)h^n$$

$$\therefore h\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)h^n = (1-2zh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(z)h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)h^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(z)h^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2zP_n'(z)h^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(z)h^{n+2}$$

بمساواة معامل h^{n+1} في الطرفين نحصل على:

$$\therefore P_n(z) = P_{n+1}'(z) - 2zP_n'(z) + P_{n-1}'(z)$$

$$\therefore P_n(z) + 2zP_n'(z) = P_{n+1}'(z) + P_{n-1}'(z)$$

العلاقة الثالثة:

بتفاضل طرفي العلاقة (1) بالنسبة لـ z فنحصل على:

$$\therefore P_{n+1}' = \frac{2n+1}{n+1}\left[zP_n'(z) + P_n'(z)\right] - \frac{n}{n+1} P_{n-1}'(z)$$

من العلاقة الثانية والتعويض عن:

$$zP_n'(z) = \frac{1}{2}\left[P_{n+1}'(z) + P_{n-1}'(z) - P_n(z)\right]$$

فنحصل على:

$$\therefore P_{n+1}'(z) = \frac{2n+1}{n+1}\left[\frac{1}{2}(P_{n+1}'(z) + P_{n-1}'(z) - P_n(z)) + P_n(z)\right] - \frac{n}{n+1} P_{n-1}'(z)$$

$$\therefore P'_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{2(n+1)} P'_{n+1}(z) + \frac{2n+1}{2(n+1)} P'_{n-1}(z) + \frac{2n+1}{2(n+1)} P'_{n}(z) - \frac{n}{n+1} P'_{n-1}(z)$$

وبالتالي فإن:

$$\therefore \frac{1}{2(n+1)} P'_{n+1}(z) = \frac{1}{2(n+1)} P'_{n-1}(z) + \frac{2n+1}{2(n+1)} P_{n}(z)$$

$$\therefore P'_{n+1}(z) = P'_{n-1}(z) + (2n+1) P_{n}(z)$$

$$\therefore P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z) = (2n+1) P_{n}(z)$$

العلاقة الرابعة:

بجمع (3)، (2) نحصل على:

$$\therefore P_{n}(z) + 2zP'_{n}(z) + P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z) = P'_{n+1}(z) + P'_{n-1}(z) + (2n+1) P_{n}(z)$$

$$\therefore 2zP'_{n}(z) = 2P'_{n-1}(z) + 2nP_{n}(z)$$

$$\therefore zP'_{n}(z) = P'_{n-1}(z) + nP_{n}(z)$$

٢ . ١٢ . ٧ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

باستخدام العلاقات التكرارية، أوجد $P_2(z), P_3(z)$، مع العلم أن $P_0(z) = 1$، $P_1(z) = z$.

الحل:

من العلاقة (1) نرى أن:

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} zP_{n} - \frac{n}{n+1} P_{n-1}$$

نضع $n = 1$ فنحصل على:

$$\therefore P_2 = \frac{3}{2} z P_1 - \frac{1}{2} P_0 = \frac{1}{2}\{3z^2 - 1\}$$

نضع $n = 2$ فنحصل على:

$$P_3 = \frac{5}{3} z P_2 - \frac{2}{3} P_1 = \frac{5}{3} z \frac{1}{2}(3x^2 - 1) - \frac{2}{3} z$$

$$P_3 = \frac{5}{2} z^3 - \frac{5}{6} z - \frac{2}{3} z$$

$$= \frac{5}{2} z^3 - \frac{3}{2} z = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$$

مثال (٢):

باستخدام العلاقات التكرارية لدالة لجندر أثبت أن:

$$P_6' = 11P_5 + 7P_3 + 3P_1$$

الحل:

من (3) نرى أن:

$$P_{n+1}'(z) = (2n+1) P_n(z) + P_{n-1}'(z)$$

نضع $n = 5$ نحصل على:

$$\therefore P_6' = 11P_5 + P_4'$$

نضع $n = 3$ نحصل على:

$$\therefore P_6' = 11P_5 + 7P_3 + P_2'$$

نضع $n = 1$ نحصل على:

$$\therefore P_6' = 11P_5 + 7P_3 + 3P_1 + P_0'$$

حيث: $P_0 = 1$ فإن $P'_0 = 0$.

ملحوظة:

يمكن إثبات أن:

في حالة n زوجي:

$$P_n'(z)=(2n-1)P_{n-1}(z)+(2n-5)P_{n-3}+\ldots+3P_1$$

أما في حالة n فردي:

$$P_n'(z)=(2n-1)P_{n-1}(z)+(2n-5)P_{n-3}+\ldots+5P_2+1$$

مثال (٣):

أوجد قيمة التكامل:

$$\int_0^1 P_n(z)dz$$

الحل:

من العلاقة:

$$(2n+1)P_n(z)=P_{n+1}'(z)-P_{n-1}'(z)$$

ليكون:

$$\therefore \int_0^1 P_n(z)dz=\frac{1}{2n+1}\{P_{n+1}(z)-P_{n-1}(z)\}_0^1$$

وحيث نعلم أن $P_n(1)=1$ فإن:

$$\therefore \int_0^1 P_n(z)dz=\frac{1}{2n+1}\left[P_{n-1}(0)-P_{n+1}(0)\right]$$

من الواضح إذا كانت n عدداً زوجياً فإن $\int_0^1 P_n(z)dz=0$ لكن إذا كانت عدداً فردياً فإن:

$$\int_{0}^{1} P_n(z)dz \neq 0$$

مثال (٤):

أثبت أن:

$$\int_{-1}^{1} zP_n(z)P_{n-1}(z)dz = \frac{2n}{4n^2-1}$$

الحل:

من العلاقة:

$$P_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{n+1} zP_n(z) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(z)$$

نجد أن:

$$\therefore zP_n(z) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(z) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(z)$$

بالتعويض في الدالة المكاملة:

$$I = \int_{-1}^{1} \left[\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(z)P_{n-1}(z) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}^2(z) \right] dz$$

ومن خاصية التعامد نرى أن:

$$I = \frac{n}{2n+1} \int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(z)dz = \frac{n}{(2n+1)} \frac{2}{[2(n-1)+1]} = \frac{2n}{4n^2-1}$$

مثال (٥):

أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{-1}^{1} z^2 P_n(z)dz$$

الحل: