سر ياضيات

الموضوع: المحاضرة (١٢) الفنانون — التاريخ: ٢ / ٥ / ٢٠١٧

* ملاحظة:

إذا كانت H مصفوفة الانتقال من الفضاء A إلى القاعدة B في فضاء V.

وكانت H' مصفوفة الانتقال من القاعدة $L(A)$ إلى القاعدة $L(B)$ في الفضاء $L(V)$ فإن:

$$H' = (H^t)^{-1} = (H^{-1})^t$$

(ترانسبوز المقلوب = مقلوب المعلوم)

* معدم مجموعة:

ليكن V فضاءً متجهياً معرفاً على حقل F ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من V عندئذٍ نعرف معدم المجموعة S والذي نرمز له بالرمز S^0 بأنه المجموعة:

$$S^0 = \{ f \in L(V) : f(u) = 0 \ , \ \forall u \in S \}$$

وهي مجموعة جميع الأشكال الخطية التي تصور جميع عناصر S بالصفر.

- يمكننا إثبات أن S^0 تشكل فضاء متجهي جزئي من $L(V)$ بغض النظر عن S إذا كانت فضاء متجهي أم لا.

- إذا كان W فضاء متجهي جزئي من V و W^0 معدم الفضاء W فإن:

$$\dim V = \dim W + \dim W^0$$

تعد

Scanned by CamScanner

★ مثال (1):

ليكن $V = \mathbb{R}^3$ ، $W \subseteq V$ حيث:

$W = \text{span}\{b_1 = (0,-1,1), b_2 = (1,0,1)\}$

أوجد بعد W ($\dim W^\circ$).

- b_1, b_2 مستقلة خطياً.
- W مولدة لـ W.

$\dim W = 2 \Leftarrow$

$\dim V = 3$

$\dim V = \dim W + \dim W^\circ$

$\Rightarrow \dim W^\circ = 3 - 2 = 1$

$W^\circ = \{f \in (L(V)) : f(w) = 0 \ \forall w \in W\}$

ليكن $f \in W^\circ$ ، $f = ax + by + cz$ شكل خطي

(يعني جميع عناصر W بالصفر (أو عناصر قاعدته))

★ $f(b_1) = 0 = 0a - 1b + 1c = -b + c$

$\Rightarrow b = c$

★ $f(b_2) = 0 = -1a + 0b + 1c = -a + c$

$\Rightarrow a = c$

$a = b = c$

$f = ax + ay + az = a(x + y + z)$

$W^\circ = \text{span}\{g = x + y + z\}$

أو $W^\circ = \{a(x + y + z) ; a \in \mathbb{R}\}$

Scanned by CamScanner

مثال (2):

ليكن $W \subseteq V$ ، $V = \mathbb{R}^3$ حيث

$W = \text{Span}\{b_1 = (1,2,3)\}$

أوجد (W°) إذا W مثل السابق

$\dim W = 1$ ، $\dim V = 3$

$\dim V = \dim W + \dim W^\circ$

$\Rightarrow \dim W^\circ = 3 - 1 = 2$

$W^\circ = \{f \in L(V) : f(u) = 0, \forall u \in W\}$

$f = ax + by + cz$ ، $f \in W^\circ$ بحيث

$f(b_1) = 0 = a + 2b + 3c$

$a = -2b - 3c$

$f = (-2b - 3c)x + by + cz$

$= -2bx + by - 3cx + cz$

$= b(-2x + y) + c(-3x + z)$

$= b f_1 + c f_2$

$W^\circ = \text{Span}\{f_1 = (-2x + y)$

$f_2 = (-3x + z)\}$

$W^\circ = \{\alpha f_1 + \beta f_2 ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Scanned by CamScanner

مثال (3):

لتكن $V = \mathbb{R}^4$ ، $W \subseteq V$ ، حيث

$$W^\circ = \text{Span}\{f_1, f_2, f_3\}$$

$$f_1 = x + 2y + 2z + t$$
$$f_2 = 2y + t$$
$$f_3 = -x - 4z + 3t$$

أوجد W

$\dim V = 4$ ، $\dim W^\circ = 3$

$\Rightarrow \dim W = 1$

$u = (x, y, z, t)$ ؛ $u \in W$ حيث

$f_1(u) = 0 = x + 2y + 2z + t$ ... (1)

$f_2(u) = 0 = 2y + t$ ... (2)

$f_3(u) = 0 = -x - 4z + 3t$ ... (3)

من (2) نجد $t = -2y$

نعوض في (1)

$x + 2y + 2z - 2y = 0 \Rightarrow x + 2z = 0$

نعوض في (3)

$\Rightarrow x = -2z$

$-(-2z) - 4z + 3(-2y) = 0$

$\Rightarrow +2z - 4z - 6y = 0 \Rightarrow -2z - 6y = 0$

$\Rightarrow 2z = -6y \Rightarrow z = -3y$

$x = 6y$

Scanned by CamScanner

$$u = (6y, y, -3y, -2y)$$

$$= y(6, 1, -3, -2)$$

$$w = \{(6y, y, -3y, -2y) ; y \in R\}$$

أي $w = Span\{(6, 1, -3, -2)\}$

الأسبوع المحاضرة 12

ناريمان جلو

محمد أنس التتان

سعاد باحث

Scanned by CamScanner