/ /

المحاضرة الرابعة : * المدخل إلى نظرية القياس *

مقدمة في نظرية المجموعات.

- مقدمة في الطبولوجيا.
- مقدمة في نظرية القياس.
- مقدمة في نظرية المجموعات :

- مفهوم المجموعة : تمثل الوعاء الذي يشمل عدة أشياء.
- طرق تمثيل المجموعة : القائمة (سرد جميع العناصر) و القاعدة (نذكر الصفة المميزة) و مخططات فين. (رسم المجموعة بعدة أشكال).

مثال: إذا كانت X مجموعة قواسم العدد 10

$X = \{1, 2, 5, 10\}$ // نرمز للمجموعة بأحرف كبيرة و لعناصرها بأحرف صغيرة //

$X = \{n \in \mathbb{N} : 10 \bmod n = 0\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

- العلاقات المرتبطة المستخدمة في المجموعات :

$1 \in X$ $7 \notin X$ $\in , \notin , \subset , \subseteq , \not\subset$

$\{1, 2\} \subset X$ $\{1, 4\} \not\subset X$

- المجموعة الخالية : $\emptyset$ أو $\{\ \}$
- وحيدة . - محتواة في أي مجموعة أخرى.

* قدرة مجموعة : عدد عناصر هذه المجموعة.
* مجموعة القوة لمجموعة ما . هي مجموعة جميع مجموعاتها الجزئية.

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

مثلا $t = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ صنف من أجزاء A أو عائلة من أجزاء A.

$t \subseteq P(A)$ $\emptyset \in t$, $\{1\} \in t$

- عدد عناصر $P(A)$ هو $2^{|A|}$ أي في المثال هنا $2^{|A|} = 2^2 = 4$

مثال: $X = \{1, 2, 3\}$

$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

- العمليات على المجموعات :

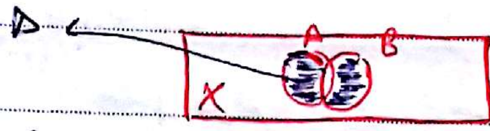
اتحاد $\cup$, تقاطع $\cap$, الفرق $\setminus$, فرق تناظري Δ , المتمم c

/ /

* العلاقات الهامة لهذه العمليات:

1) $\phi^c = X$, $X^c = \phi$ ((باعتبار X شاملة نسبيا")).

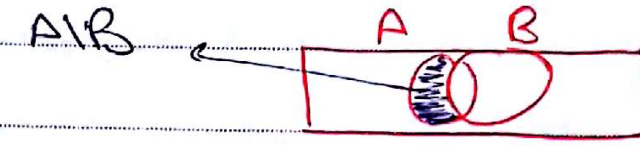
2) $A \Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ إذا كان التقاطع فاي فإنه نفسه الاتحاد



3) $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ قوانين ديمورغان.

$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

4) $A\setminus B = A\cap B^c = A\,\Delta(A\cap B) = A\setminus(A\cap B) = (A\cup B)\,\Delta B$.



5) $A\cap B = (A\cup B)\setminus(A\Delta B)$

6) $A\cup B = (A\Delta B)\,\Delta\,(A\cap B)$

$= A\,\Delta\,(B\setminus A)$

7) $A\cup A^c = X$, $A\cap A^c = \phi$

توضيح: إذا كانت $A=\{a,b\}$ ،

$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, A\}$

المطلوب: بين أنه $P(A)$ مغلقة بالنسبة لجميع العمليات على المجموعات.

// سوف نوضح لأجل الاتحاد فقط //

$\cup$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	A
ϕ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	A
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	A	A
$\{b\}$	$\{b\}$	A	$\{b\}$	A
A	A	A	A	A

* تعريف التبولوجيا:

إذا كانت X مجموعة غير خالية وكانت t صنف من أجزاء X نقول عن t أنه يمثل تبولوجيا على X إذا تحققت الشروط:

1- $\phi, X \in t$ ((إذا كانت X منتهية.

2- $\forall A, B \in t ;\ A\cap B \in t,\ A\cup B \in t$

3- $\forall A_i \in t ,\ i\in I$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in t$

غير منتهية.

t تمثل طوبولوجيا: $X=\{1,2\}$ $\quad t=\{\phi,\{1\},X\}$

$t=\{\phi,X\}$ ← أصغر طوبولوجيا

$A\subset X$

$t_2=\{\phi,A,A^c,X\}$ ← تحقق كل شروط الطوبولوجيا

$t_3=P(A)$ ← أكبر طوبولوجيا موجودة

ملاحظات: 1- كل عنصر من t يدعى مجموعة مفتوحة.

2- A مفتوحة $\Leftrightarrow$ A^c مغلقة.

3- إن X، ϕ مفتوحتان ومغلقتان في آن واحد.

4- كل عنصر متمم لعنصر من t ندعوه مجموعة مغلقة.

* مقدمة في نظرية القياس:

- تعريف الحلقة وخواصها
- تعريف الجبر وخواصه
- تعريف القياس وخواصه

تعريف الحلقة: إذا كانت X مجموعة غير خالية، t صف غير خالي من أجزاء X نقول عن t أنه حلقة على X إذا تحققت الشروط:

1- $\phi\in t$ $\qquad$ 2- $A,B\in t$: $A\cup B\in t$, $A\setminus B\in t$

نقول عن الحلقة أنها تامة إذا كانت مغلقة بالنسبة للاجتماع المعدود.

مثال: إذا كانت $X=\{1,2\}$

$t_1=\{\phi,\{1\},\{2\},X\}$

$t_2=\{\phi,X\}$ $\qquad$ $t_3=\{\phi,\{1\},X\}$

بين أي الصفوف يمثل حلقة وأيها لا يمثل حلقة.

t_1، t_2 حلقات بينما t_3 ليست حلقة لأن:

$\{1\},X\in t_3$

$X\setminus\{1\}=\{2\}\notin t_3$.

مبرهنة: إذا كانت t صف غير خالي من أجزاء X وكانت $\phi\in t$ عندئذٍ يكون t حلقة إذا تحقق أحد الشرطين التاليين: (الشروط متكافئة).

1- $\forall A,B\in t$, $A\cup B\in t$, $A\setminus B\in t$

2) $\forall A,B\in t$: $A\Delta B\in t$, $A\cup B\in t$

3) $\forall A, B \in t ; \quad A \Delta B \in t , \quad A \setminus B \in t$

4) $\forall A, B \in t ; \quad A \Delta B \in t ; \quad A \cap B \in t$

$\forall A, B \in t ; A \cap B \in t ; A \cup B \in t$ سؤال: إذا تحقق الشرط:

$\Leftarrow t$ حلقة؟ الرمز هو «المثال هو امثال سابقة: 3) $\Delta, \cap, c$

سؤال: هل الحلقة مغلقة بالنسبة لجميع العمليات على المجموعات:

. تعريف الحلقة: $A, B \in t ; A \cup B \in t , \phi \in t$

$A \setminus B \in t$

الجواب: 1) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in t$

$\underbrace{\underbrace{A \setminus B}_{\in t} \cup \underbrace{B \setminus A}_{\in t}}_{\in t} \Rightarrow A \Delta B \in t$

2) $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) \in t$

$\underbrace{\underbrace{A \cup B}_{\in t} \setminus \underbrace{A \Delta B}_{\in t}}_{\in t} \Rightarrow A \cap B \in t.$

3) $A \in t \overset{?}{\Rightarrow} A^c \in t$

المثال: $X = \{1, 2, 3\}$ إذ $t = \{\phi\}$

$t = \{\phi, \{1\}\}$ حلقة

ملاحظة: إذا كانت t حلقة وموجود الـ X فيها فإنها تكون مغلقة بالنسبة لجميع العمليات.

. تعريف الجبر: لتكن X مجموعة غير خالية وكان $\mathcal{A}$ جزء غير خالٍ نقول إنه $\mathcal{A}$ يمثل جبراً في X إذا تحققت الشروط التالية:

1- $X, \phi \in \mathcal{A}$

2) $A, B \in \mathcal{A} ; A \cup B \in \mathcal{A} , A \setminus B \in \mathcal{A}$

ملاحظة: كل حلقة تحوي X هي جبر.

وأيضاً شروط مكافئة للجبر:

1) $\phi \in \mathcal{A}$

$\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \quad , \quad \forall A \in \mathcal{A} ; A^c \in \mathcal{A}$

يمكن استنتاج الشرط الأول (في تعريف الجبر) من هذه الشروط. ((استنتاج ٪٥٠ جيد))

$A, B \in t \overset{?}{\Rightarrow} A \setminus B \in t$

اذا كانت $A, B \in t$ ⟸ $A', B' \in t$ ⟸ $A' \cup B \in t$

$A \cap B' \in t$

فبحدود مورغان $(A' \cup B)' \in t$ ⟸

وان: $A \setminus B = A \cap B' \in t$.

المحاضرة الخامسة عشر: المدخل الى نظرية القياس.

- مقدمة في نظرية المجموعات.
- الطوبولوجيا.
- نظرية القياس.

• تعريف الطوبولوجيا: $X \neq \phi$ و t جماعة من أجزاء X بأن t يشكل طوبولوجيا X إذا تحقق: ① $\phi, X \in t$

② $\forall A, B \in t ; A \cup B \in t, A \cap B \in t$.

③ $\forall A_i \in t ; i \in I ; \bigcup_{i \in I} A_i \in t$.

• المدخل الى نظرية القياس:

الحلقة: $X \neq \phi$ و t جماعة من أجزاء X فإذا كانت t مغلقة بالنسبة للاجتماع والفرق فإن t حلقة.

نتيجة: t مغلقة بالنسبة لـ $\cup$، $/$، Δ، $\cap$ وغير مغلقة بالنسبة للمتمم.

• ندعو حلقة تامة اذا كانت حلقة مغلقة بالنسبة للاجتماع المعدود

$\forall A_i \in t ; i \in I ; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in t$

الجبر: هو حلقة تحوي X.

أي: $X \neq \phi$ و $\mathcal{A}$ جماعة من أجزاء X نقول ان $\mathcal{A}$ جبراً إذا تحقق: ① $\phi, X \in \mathcal{A}$ ② $\forall A, B \in \mathcal{A} ; A \cup B \in \mathcal{A}$

$A \setminus B \in \mathcal{A}$

نتيجة: الجبر مغلق بالنسبة لجميع العمليات.

$X, A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A} , A^c \in \mathcal{A}$

وتعريف آخر: 1) $\phi \in \mathcal{A}$. ② $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

3) $\forall A \in \mathcal{A} ; A^c \in \mathcal{A}$ $((A \setminus B = A \cap B'))$

نحصل على تعريف الجبر السابق لأن هنا التركيب// ⟸ مغلقة لجميع العمليات.

الجبر التام: هو جبر ومغلق بالنسبة للاجتماع العدود.
سؤال: هل هو أيضاً مغلق بالنسبة للتقاطع العدود؟ . بالاستفادة ما تعلم علمًا أنبات ذلك.

$\forall A_i \in \mathcal{A} \overset{?}{\Rightarrow} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$\forall A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow A_i^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in \mathcal{A}$.

أيضاً: $P(X)$ ، $\{\emptyset, X\}$ ، $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ جبور.

تمرين: اذا كانت $X=\{1,2,3,4\}$ وكانت T صف من أجزاء X حيث
$T=\{\{1,2\},\{3\}\}$

والمطلوب: ① هل T يشكل حلقة على X
② أوجد أصغر حلقة مولدة بالصف T.
③ " " جبر مولد بالصف T.
④ " " جبر بوليا مولد " " T.
⑤ ما هو أصغر جبر من أجزاء X.
⑥ ما هو أكبر جبر من أجزاء X.

الجواب: ① T لا يشكل حلقة لأن $\emptyset \notin T$
② أصغر حلقة تحوي T (مولدة من الصف T)
$\{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$
③ $\{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}, X, \{4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}\}$
④ $\{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, X\}$
⑤ $\{\emptyset, X\}$
⑥ $P(X)$

المحاضرة السادسة عشر: * القياس وخواصه *

* تعريف القياس - ملاحظات - خواص القياس:

1- الخاصية الفرقية 2- الخاصية الطردية 3- الخاصية نصف الجمعية المعدودة

4- خاصية استمرار الاحتواء 5- خاصية استمرار التقاطع

- أمثلة عن القياسات: ① قياس العد ② قياس ديراك ③ القياس المحدود.

- تطبيقات عن القياس.

* تعريف القياس: لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن $\mathcal{A}$ جبر تام لـ X. نقول عن التابع μ أنه قياس على $\mathcal{A}$ إذا تحققت الشروط: $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty]$

إذا كانت المجموعة مفتوحة.

1)- $\mu(\emptyset) = 0$

2)- $\forall A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

الخاصية الجمعية.

ملاحظات: ①- تسمى الثلاثية $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء القياس أو فضاء مقيوس.

②- عناصر $\mathcal{A}$ تدعى مجموعات مقيوسة.

③- يسمى القياس منتهي $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) < +\infty \Rightarrow$

فالفضاء منتهي. $(X, \mathcal{A}, \mu)$

④- إذا كان $\mu(X) = 1 \Rightarrow P(A) = \mu(A)$ قياس الاحتمال

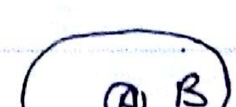
وذلك $\forall A \in \mathcal{A}$ ونسمي $(X, \mathcal{A}, P=\mu)$ فضاء الاحتمال.

⑤- $\forall A \in \mathcal{A}$ فإن: $\mu(A) \geq 0$

* خواص القياس:

①- الخاصية الفرقية: $A, B \in \mathcal{A}$ ، $A \subseteq B \Leftarrow$

$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$



$B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

$\Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

②- الخاصية الطردية:

$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

③ - الخاصية نصف الجمعية المعدودة :

$\forall A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

$i \in \mathbb{N}$

الإثبات: نقوم بإنشاء مجموعات منفصلة مثنى مثنى بالشكل:

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

$\vdots$

نلاحظ:

① $B_i \subseteq A_i$

② $B_i \cap B_j = \emptyset \;;\; i \neq j$

(منفصلين مثنى مثنى)

3) $\bigcup_{1}^{\infty} B_i = \bigcup_{1}^{\infty} A_i$

$\mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} B_i\right) = \sum \mu(B_i) \le \sum \mu(A_i)$

لأنه B_i منفصلين مثنى مثنى

من ملاحظة ① $B_i \subseteq A_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$

④ - خاصية استمرار التزايد: ليكن

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$

حيث

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$

فإن:

$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_i\right)$

// نفس الفكرة كما أخذنا بالمتسلسلة

$\sum a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} a_n$ //

⑤ - خاصية استمرار التناقص: إذا كانت

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$

فإن:

$\mu\left(\bigcap_{1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$

* أمثلة عن القياسات: ① قياس العد: إذا كانت $X \neq \emptyset$ نعرف التابع:

$\mu : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$

عدد عناصر A

$A \longmapsto \mu(A) = \begin{cases} n & , \ A \text{ منتهية} \\ +\infty & , \ A \text{ غير منتهية} \end{cases}$

$(X, P(X), \mu)$ ويسمى

فضاء قياس العد.

② - قياس ديراك: $X \neq \emptyset$, $a \in X$ (مثبت) لنعرف: $\mu_a : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (أو $\{0,1\}$)

$A \longmapsto \mu_a(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$

③ - القياس المحدود: $X \neq \emptyset$ و $\mathcal{A}$ جبر تام معرف كما يلي:

$\mathcal{A} = \{A \in P(X)$; إما A محدودة أو A^c محدودة

$\Rightarrow \mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (أو ١٧.٩٠)

$A \longmapsto \mu(A) = \begin{cases} 1 & A^c \text{ محدودة} \\ 0 & A \text{ محدودة} \end{cases}$

* تطبيقات: ①. إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءاً مقيوساً والمطلوب:

1) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

2) - $\forall A, B \in \mathcal{A}$; إذا كان $\mu(A \Delta B) = 0$

أثبت أنه: $\mu(A) = \mu(B)$.

3). $B \subseteq X$, $\mu_B : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$;

$\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$

والمطلوب: أثبت أنه μ_B قياس. المطلوب إثباته قياس بالأصل قياس

* القياس الخارجي لمجموعة A:

①- مفهوم القياس الخارجي ②. تعريف القياس الخارجي

③. هل كل قياس هو قياس خارجي ؟ ④. هل كل قياس خارجي هو قياس ؟

⑤. مثال ⑥ • تعريف المجموعات المقيوسة (لأجل القياس الخارجي).

* مبرهنة: إذا كان μ^* قياس خارجي على X (أجزاء X):

$\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ فإنه يولد قياس μ على جبر تام من $P(X)$ بحيث،

$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mu^*\big|_{\mathcal{A}} = \mu$

تعريف: إذا كانت $X \neq \emptyset$ وكانت $P(X)$ مجموعة جميع أجزاء X. $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$

نقول عن μ^* أنه قياس خارجي على X (أجزاء X). إذا تحققت الشروط:

①- $\mu^*(\emptyset) = 0$ ② $A, B \in P(X)$; $A \subseteq B$; $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$

③- $\forall A_i \in P(X)$. $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

• كل قياس هو قياس خارجي: (العكس ليس بالضرورة) (أو $A_i \subseteq X$)

مثال: (المبين أنه ليس بالضرورة كل قياس خارجي هو قياس))

برهن أنه التابع المعرف بالشكل التالي:

$\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$\mu^*(A) = \sqrt{|A|}$

/ /

حيث $|A|$ عدد عناصر A هو قياس خارجي وليس قياساً على $P(X)$ جبراً، نأخذ $\mathcal{A}$ بحيث، $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$.

الحل:

1) $A=\emptyset \Rightarrow |A| = |\emptyset| = 0 \Rightarrow \mu^*(A) = \sqrt{|\emptyset|} = 0$.

2) $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B| \Rightarrow \sqrt{|A|} \leq \sqrt{|B|} \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

3). هنا لنأخذ عدد منتهي من A_i فإذا تحقق الشرط لأجل عدد منتهي فمتاح بالاستقراء الرياضي.

$A_1, A_2, \dots, A_n$, $A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n$.

$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$

$\sqrt{|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|} \leq \sqrt{|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|} \leq \sqrt{|A_1|} + \sqrt{|A_2|} + \dots + \sqrt{|A_n|}$

$\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{1}^{n} \mu^*(A_i)$

$\Leftarrow$ μ^* قياس خارجي على $P(X)$

نأخذ A, B بحيث ~~$A \cap B$~~ $A \cap B = \emptyset$

$|A \cup B| = |A| + |B|$

$\sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{|A| + |B|} \neq \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|}$.

أولاً// يمكن نأخذ مثال عددي للنفي: حيث نأخذ $|A| = 9$ و $|B| = 16$ ونطبقه

فيكون: $\sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{|A| + |B|} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

ولدينا $\sqrt{|A|} + \sqrt{|B|} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

وإذن $7 \neq 5$ //

$\mu^*(A \cup B) \neq \mu^*(A) + \mu^*(B) \Rightarrow$ μ^* ليس قياس على $P(X)$.

• $\{\emptyset, X\}$ هو الجبر التام، نعتبر $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$

μ قياس: ~~$\{\emptyset, X\}$~~ $\{\emptyset, X\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$\forall A \in \{\emptyset, X\} ; \mu(A) = \sqrt{|A|}$.