الموضوع المحاضرة السابقة — التاريخ 2017/4/10

هام

تتمة لما تم أخذه في المحاضرة السابقة :

لنأخذ الجدول التالي :

القيمة في نقطة	العنصر العام (الرمز المستخدم)	الفضاء
—	x	X فضاء
$f(x)$	f	X^* فضاء ثنوي
$g(f)$	g	X^{**} فضاء ثنوي ثاني

نلاحظ أنه لا يوجد قيمة عند النقطة لأنه ليس تطبيق وإنما فضاء متجه vector space

نلاحظ أن كل فضاء معرف على الذي قبله

من الممكن الحصول على $g \in X^{**}$ وهو دالي خطي معرف على X^* بأن نختار عنصر مثبتاً من X أي $x \in X$ ونكتب

متغير

$\boxed{f}$ X^* $\boxed{x}$ X

$$g(f) = \underbrace{g_x}_{\text{مثبتة}}(f) = f(x) \leftarrow \text{دالة}$$

لأننا نتصرف دالي ع X^* وبالتالي كل الدوال f ستكون معرفة في كل نقطة $x \in X$ "أي المتبدل"

أن جميع العناصر في X^* معرفة عند النقطة X.

هنا الدليل السفلي x للتذكرة بأننا حصلنا على g باستعمال عنصر معين x من X

إن g_x المعرف أعلاه هو خطي لأن:

$$g_x(f_1+f_2) = g_x(f_1) + g_x(f_2)$$

من أجل أي :

$$C : X \longrightarrow X^{**}$$
$$x \longmapsto g_x = Cx$$

يدعى C التطبيق القانوني لـ X في X^{**}.

التطبيق القانوني منطلقه فضاء متجهي ومستقره فضاء متجهي

أثبت أن X^{**} فضاء متجه "الطريقة"

إن التطبيق C خطي لأن ساحته فضاء متجه لأنه :

$$C(x+y)(f) \overset{?}{=} C(x)(f) + C(y)(f)$$
$$C(x+y)(f) = g_{x+y}(f) = f(x+y)$$
$$\overset{\text{خطي}}{=} f(x) + f(y)$$
$$= g_x(f) + g_y(f)$$
$$= C(x) + C(y)$$

هنا نأخذ تساوي داليين

ليس له علاقة مباشرة X^{**} لأنه معرف على X.

الموضوع .... التاريخ / /

وكذلك $C(\alpha x)(f) = g_{\alpha x}(f)$

$= f(\alpha x)$

$= \alpha f(x) = \alpha g_x(f) = \alpha C(x)$

يدعى C أيضاً بـ "الطمر القانوني" لـ X في X^{**}.

P.140/141/142/143/145/146 مطالعة (قراءة).

P.147 مبرهنة (بعد X^{*}) تؤجل الى نهاية الفصل إذا زاد وقت

X شرح توضيحي (غير مطلوب)

T مؤثر $T: X \longrightarrow Y$

سيرمز لكل المؤثرات الخطية التي منطلقها X و مستقرها Y بالفضاء الثنوي

إن $B(X, Y)$ كل المؤثرات الخطية التي منطلقها X ومستقرها Y. مرجع P.153

يمكن تعريف هنا نظيم كما مرّ سابقاً:

P.153/152 حالياً "للقراءة".

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

إن $B(X,Y)$ إذا عرفنا عليها دالة وأثبت أن هذه الدالة معرفة على ذلك الفضاء فهو فضاء منظم

$X^{'}$ معرف طبولوجي

X^{*} معرف جبريا

154 ← 163 "قراءة".

الفصل الثالث ← فضاءات الجداء الداخلي. فضاءات هلبرت:

فضاء الجداء الداخلي X هو فضاء متجهي مزود بدالة الجداء الداخلي $\langle .,. \rangle$

أي $(X, \langle .,. \rangle)$ ويمكن أن يكون فضاء متجهي حقيقي أو عقدي.

$\langle .,. \rangle : X \times Y \longrightarrow K \; : \; K = \mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$

$(x,y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ عدد حقيقي

* الذي يتحقق في النظيم يتحقق في الجداء الداخلي لكن ليس بالضرورة كلما يتحقق بالجداء الداخلي أن يتحقق بالنظيم.

إن هذه الدالة تحقق:

إذا كانت x, y, z من الفضاء المتجهي X وأيًّا كان العدد α فإن:

$S_1: \langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

$S_2: \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

$S_3: \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

$S_4: \langle x,x\rangle \geq 0 \,,\ \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

نظيمه هو: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

ترتبط بالجداء الداخلي بالعلاقة $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ cauchy shwarz

وبالتالي كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم.

كما أن هذا الجداء يحدد متري:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

تتحقق كمساواة إذا x و y مرتبطين خطياً

$\Leftarrow$ فضاء الجداء الداخلي التام هو فضاء منظم تام $\Leftarrow$ فضاء هلبرت هو فضاء باناخ

إذا كان X فضاء متجهي حقيقي $\Leftarrow$ استناداً لـ S_3 يكون:

$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ "التناظر"

يترتب على الشروط من $S_1 \leftarrow S_4$ ما يلي:

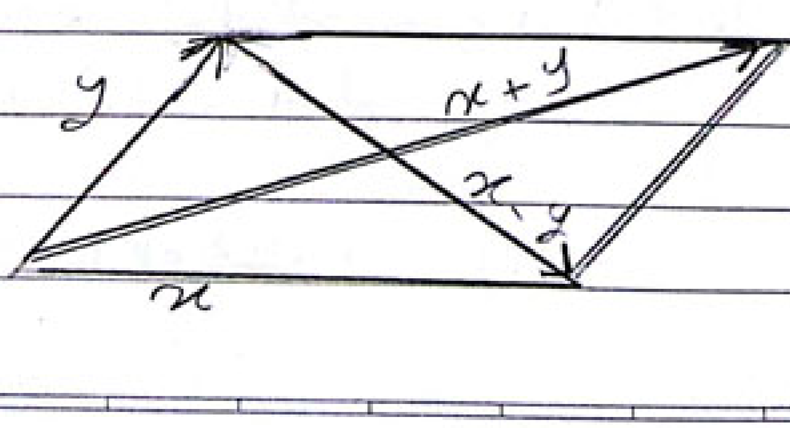
- $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$
- $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$
- $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \bar{\beta}\langle x,z\rangle$

ملاحظة

إن كل نظيم مشتق من جداء داخلي لابد أن يحقق مساواة متوازي الأضلاع:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

ومنه ليس بالضرورة أن يكون كل فضاء منظم هو فضاء جداء داخلي



الموضوع .... التاريخ / /

تعريف التعامد: يقال عن عنصر x في فضاء جداء داخلي X انه متعامد مع العنصر y من X إذا كان $x \perp y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$

أمثلة:

الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$

الفضاء $\mathbb{R}^n$ هو فضاء هلبرت.

بأخذ عنصرين $x,y \in \mathbb{R}^2$ حيث: $x = (\xi_i)\,;\, i=\overline{1,n}$, $y = (\eta_i)\,;\, i=\overline{1,n}$

$$\langle x,y\rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

$\langle \mathbb{R}^n, \langle .,.\rangle\rangle$ فضاء جداء داخلي لأنه يحقق الخواص ، ونجد أن:

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$
$$= (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$$

ونستخلص من ذلك النورم المترك الإقليدي:

$$d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

الفضاء الوحدي $\mathbb{C}^n$

$$\langle x,y\rangle = \xi_1\bar{\eta}_1 + \xi_1\bar{\eta}_2 + \dots \xi_n\bar{\eta}_n$$

نظيمه:

$$\|x\| = (|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2)^{1/2}$$

وهو فضاء جداء داخلي

الفضاء $\mathcal{L}^2[a,b]$

وهو فضاء الدوال القابلة للمكاملة تربيعياً وهو متمم للفضاء $C[a,b]$

وحيث أن:

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt\right)^{1/2}$$

والجداء الداخلي هو:

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)y(t).dt$$

في حال كانت الدوال عقدية فإن الجداء الداخلي يغدو بالعلاقة:

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t).\bar{y}(t).dt$$

FARAH

لأن $z\bar{z}=|z|^2$

ونظيمه : $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 . dt\right)^{1/2}$

نستنتج أنّ $L^2[a,b]$ هو فضاء هلبرت (فضاء جداء داخلي تام)

فضاء متتاليات هلبرت ℓ^2 :

هو فضاء المتتاليات الذي يحقق تقارب السلاسل ،

إن الفضاء ℓ^2 هو فضاء هلبرت المزود بالجداء الداخلي المعرّف بالمساواة :

$x=\xi_i , y=\eta_i$ و $x,y\in\ell^2$; $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i$

وكلٌّ من x,y تحقق $\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2<\infty$ ، $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2<\infty$

إن تقارب هذه السلسلة ناتج من متباينة كوشي شوارتز :

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|.\|y\|$$

حيث : $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\bar{\xi}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2}$

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2}$$

وبالتالي

$$|\langle x,y\rangle| \le \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{1/2}}_{\text{موجود}}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2\right)^{1/2}}_{\text{موجود}}$$

كون العنصرين $x,y\in\ell^2$ وبالتالي $\langle x,y\rangle$ موجود والنظيم محدد بالمساواة

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{1/2}$$

اثبات أنه تام (ارجع تابعي 1)

الفضاء ℓ^p : إن الفضاء ℓ^p عندما يكون $p\neq 2$ ليس فضاء جداء داخلي

وبالتالي فإنّ ℓ^p ليس فضاء هلبرت .

الإثبات :

من النص نجد أن النظيم على ℓ^p عندما $p\neq 2$ لا يمكن أن نشتقه من جداء داخلي

الموضوع   التاريخ / /

ولنبرهن ذلك بإثبات أن النظيم لا يحقق متساوية متوازي الأضلاع

إذا كان:

$$x = (1,1,0,0,\dots) \in \ell^p$$
$$y = (1,-1,0,0,\dots) \in \ell^p$$

$\Leftarrow \|x\| = \|y\| = 2^{1/p}$ ، $\|x+y\| = \|x-y\| = 2$

$\Leftarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ عندما $p \neq 2$

* ملاحظة: عند ℓ^p تام و $p \neq 2$ فإن ℓ^p هو فضاء باناخ دون أن يكون فضاء هلبرت

الفضاء $C[a,b]$:

الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي وبالتالي ليس فضاء هلبرت

البرهان:

النظيم يعرّف بالعلاقة: $\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$

لا يشتق من جداء داخلي لأنه لا يحقق متساوية متوازي الأضلاع

فإذا أخذنا:

$x(t) = 1$ ، $y(t) = (t-a)/(b-a) \Leftarrow \|x\| = 1, \|y\| = 1$ و

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}$$

$\Leftarrow \|x+y\| = 2$ ، $\|x-y\| = 1$ وأن

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
$$5 \neq 4$$

تحقق المطلوب.

س د ملاحظة: إذا كان الفضاء فضاء جداء داخلي حقيقي فإن

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$ ← س د ت

أما إذا كان عقديًا:

$$\mathrm{Re}\langle x,y \rangle = 1/4 \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$ ← أثبت ذلك

$$\mathrm{Im}\langle x,y \rangle = 1/4 \left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$ ← س د ذلك

الإثبات وظيفة.

التاريخ / / الموضوع

خواص أخرى لفضاءات الجداء الداخلي:

واجب قراءة P.176-177

178, 179

استقرار ⇐ الإثبات إما ← مطلوبة

أو أسلوب المتتاليات

ملاحظة تمهيدية (استقرار الجداء الداخلي)

إذا كان $x_n \to x$ ، $y_n \to y$ في فضاء جداء داخلي

فإن $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

: كون لدينا جداء داخلي $\langle .,. \rangle$ أي معرّف على $X \times X$ ⇐

نحتاج الى متتاليتين وليس متتالية لذلك أخذنا x_n ، y_n.

البرهان لنبرهن أن صورة المتتالية (x_n, y_n) تسعى الى صورة (x, y)

وفق الدالة $\langle .,. \rangle$ في الفضاء K ; $K \to \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

$$\langle .,. \rangle : X \longrightarrow Y$$

باستخدام متباينة شوارتز نجد أن:

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle|$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle|$$

متقاربة وهي محدودة

محدودة

$$\leq \|x_n\| . \|y_n - y\| + \|x_n - x\| . \|y\| \longrightarrow 0$$

لأن $x_n \to x$ ⇐ $\|x_n - x\| \to 0$

$y_n \to y$ ⇐ $\|y_n - y\| \to 0$

و $\|y\|$ ، $\|x_n\|$ كلاهما محدود

وبالتالي $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$ ⇐ $\langle .,. \rangle$ فضاء الجداء الداخلي دالة مستمرة.

التاريخ / / الموضوع

مبرهنة الفضاء الجزئي

ليكن Y فضاء جزئي من فضاء هلبرت H، عندئذٍ تصح الدعاوى التالية :

أ- Y الشرط اللازم والكافي كي يكون Y تاماً هو أن يكون مغلقاً في H .

برهانها موجود P.39

فضاء هلبرت هو فضاء متري تام .

ب- إذا كان Y منتهي البعد فإنه تام .

كل الفضاءات منتهية الأبعاد هي تامة (مبرهنة سابقاً)

كل الفضاءات النظيمة منتهية البعد هي تامة .

كل فضاء جزئي من فضاء متجهي هو فضاء متجهي .

ج- إذا كان H فصولاً فإن Y يكون كذلك، وبوجه أعم كل مجموعة جزئية من فضاء داخلي فصول فصولة .

برهانها مطلوب للطالب

ملاحظة :

إن R فصول لأنه فيه Q كثيفة ومعدودة .

جزء من R ⊃ Q كثيفة به ⇐

الجزء المتقاطع مع الكثيفة الموجودة فيه

بالفضاء كامل تتقاطع مع الجزء فصولها

كثيف

- العناصر الواقعة في الجزء مع الكثيفة هنا أو على الأكثر معدودة .

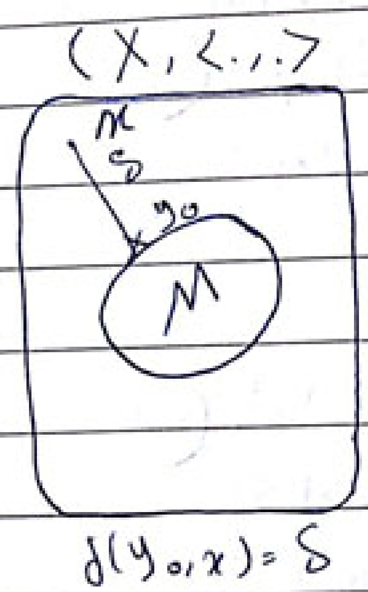
المجموعات المنتهية معدودة .

جزء من فصول حتماً سيكون فصول

أ هذه العبارة تثبت صحة القضية .

المتممات المتعامدة والمجاميع المباشـــرة

تعريف المسـافة δ بين عنصر x في فضاء متري X ومجموعة جزئية غير خالية M في X بأنها:



$$\delta=\inf_{y\in M} d(x,y) \qquad M\neq\varnothing$$

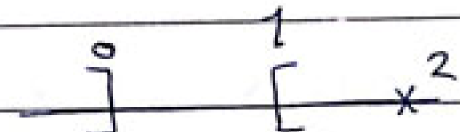
وتغدو هذه المسـافة في فضاء منظم على الشكل:

$$\delta=\inf_{y\in M}\|x-y\|$$

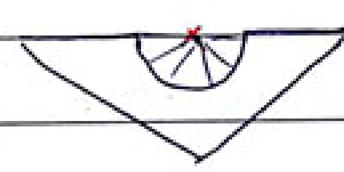
إن $\inf d(x,y)$ موجود دوماً لأن كل مجموعة محدودة من الأدنى وغير خالية في $\mathbb{R}$ يوجد لها $\inf$ لتمتع $\mathbb{R}$ بخاصية أكبر حد أدنى وأصغر حد أعلى.

هل يوجد عنصر من عناصر M يعطي هذا البعد؟

أمثلة:

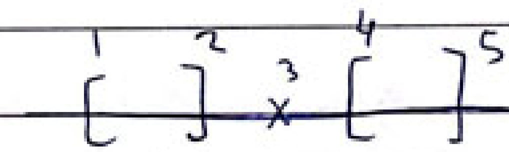


بعد النقطة 2 عن المجموعة $]0,1[$ هو 1 .



يوجد عدد غير منتهٍ من النقاط

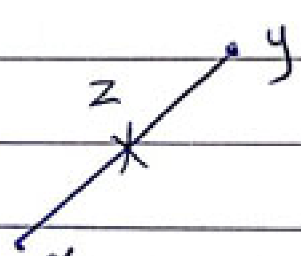
$M=[1,2]\cup[4,5]$



بعد النقطة 3 عن المجموعات هو 2 .

تعريف القطعة المسـتقيمة الواصلة بين عنصرين x و y من فضاء متجهي X:

مجموعة كل العناصر z من X من الشكل:



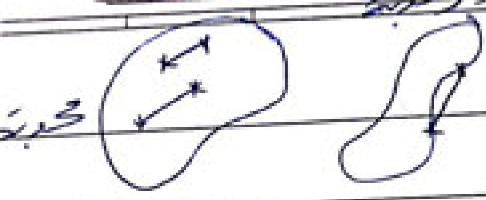
$$z=a(x)+(1-a)y \qquad (a\in\mathbb{R},\ 0\le\alpha\le1)$$

المجموعة المحدبة: نقول عن مجموعة جزئية M من X إنها محدبة إذا كانت القطعة المسـتقيمة الواصلة بين أي نقطتين x و y في M محتواة في M.

- إن كل فضاء جزئي Y من X محدب أي كل فضاء جزئي من فضاء متجهي محدب

الموضوع

التاريخ / /



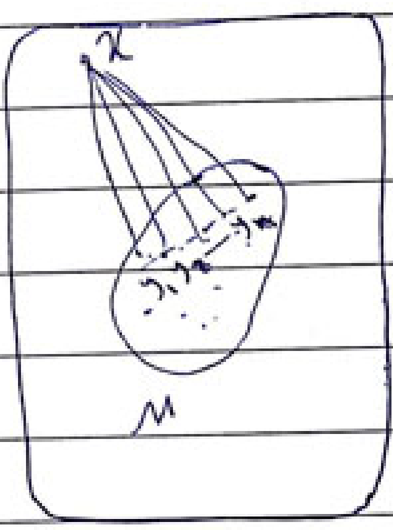
وتقاطع مجموعات محدبة هو مجموعة محدبة

- مبرهنة (المتجه الأصغر) ليكن X فضاء جداء داخلي، ولتكن M مجموعة جزئية غير خالية ومحدبة وتامة عندئذٍ يوجد لكل عنصر x من X عنصر وحيد y بحيث يكون:

$$\delta = \inf_{y\in M} \|x - y\| = \|x - y\| = d(x,y)$$

توضيح ثم برهن:

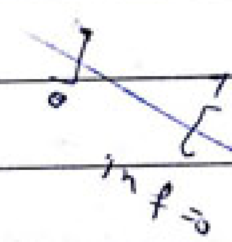
المتتالية الأصغرية ليست وحيدة.



- إذا كان هناك inf ⇐ يوجد متتالية من عناصر المجموعة تسعى نحو الـ inf وتسمى المتتالية الأصغرية.

- العنصر الذي يعطي البعد الأصغري يختلف عن البعد الأصغري.

- المسافة بين عناصر y_n و النقطة x هي متتاليات عددية متقاربة إلى δ ; δ هو عدد وحيد إجباري و العناصر التي تعطي البعد هي التي تتغير.



البرهان:

1- الوجود: استناداً لتعريف الحد الأدنى (inf) ثمة متتالية (y_n) عناصرها في M : $(y_n) \subseteq M$

بحيث:

$$d(y_1, x) = \delta_1$$
$$d(y_2, x) = \delta_2$$
$$\vdots$$
$$d(y_n, x) = \delta_n$$

$$d(x, y_n) = \|x - y_n\| = \delta_n \to \delta \quad *$$

كل متتالية تسعى لـ inf أصغرية:

إن $\delta = \inf d(x,y)$ موجود ⇐ يوجد متتالية (y_n) أصغرية

توضيح inf: لتكن $M \subseteq \mathbb{R}$ ولنفرض $\alpha = \inf M$ ، $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ محدود من الأدنى $\alpha = \inf S$ ، ولنثبت وجود متتالية أصغرية من عناصر $S \leftarrow \alpha$

I $\alpha \le x \Leftarrow x \in S \Leftarrow$

$\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists x_n : x_n < \alpha + \frac{1}{n}$

$x_n \geq \alpha$

$x_n \in S$

$\lim x_n = \alpha$

تتمة البرهان :

وهي كوشية، لنضع $y_n - x = v_n$ نجد :

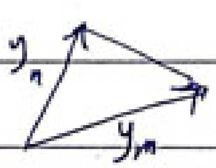
$\delta_n = \|x - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta$

$\|y_n - x\| = \|v_n\|$

$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\| \geq 2\delta$

وذلك كون M محدبة $\Leftarrow \frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ ولدينا :

$y_n - y_m = v_n - v_m$



$\Leftarrow$ يترتب على مساواة متوازي الأضلاع أنّ :

$\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 = -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2)$

$\le -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2)$

يقتضي أنّ y_n متتالية كوشية. (حسب *)

كون M تامة $\Leftarrow y_n$ متقاربة، ولنفرض $y_n \to y \in M$

كون $y \in M \Leftarrow \|x - y\| \geq \delta$، وحسب * نجد

$\|x - y\| \le \|\underbrace{x - y_n}_{\to \delta}\| + \|\underbrace{y_n - y}_{\to 0}\| = \delta_n + \|y_n - y\| \to \delta$

$\Leftarrow \|x - y\| = \delta$

2- اثبات الوحدانية :

نفرض أن العنصرين y و y_0 في M يحققان :

$\|x - y\| = \delta$

$\|x - y_0\| = \delta$

ولنبرهن أن $y = y_0$

الموضوع .... التاريخ / /

بتطبيق مساواة متوازي الأضلاع

$$\|y-y_0\|^2 = \|(y-x)-(y_0-x)\|^2$$

$$= 2\|y-x\|^2 + 2\|y_0-x\|^2 - \|(y-x)+(y_0-x)\|^2$$

$$\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|\frac{y+y_0}{2} - x\right\|^2$$

$$\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

كون $\frac{y+y_0}{2} \in M$ وبعد النقطة $\frac{y+y_0}{2}$ عن x أكبر أو يساوي

أي :

$$\left\|\frac{1}{2}(y+y_0) - x\right\| \geq \delta$$

$$-4\left\|\frac{1}{2}(y-y_0) - x\right\|^2 \leq -4\delta^2$$

وبالتالي :

$$\|y-y_0\| \leq 0$$

ونعلم ، $\|y_0-y\| \geq 0$

$$\Leftarrow \quad \|y-y_0\| = 0$$

$$\Rightarrow y = y_0$$

Manal

٣-٣-٢ تمهيدية (التعامد)

لنفترض في المبرهنة ٣-٣-١ ان M فضاء جزئي تام Y وان x نقطة مثبتة في X. عندئذ يكون $z = x - y$ عموديا على Y .

البرهــان :

اذا لم يصح كون $z \perp Y$ ، لوجدت نقطة y_1 من Y بحيث أن

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0. \tag{5}$$

من الواضح أن $y_1 \neq 0$ ، ذلك أنه اذا لم يتحقق هذا الامــر لكان $\langle z, y_1 \rangle = 0$. وفضلا عن ذلك ، نرى أنه اذا كان α عددا ما ، فان

$$\begin{aligned}\|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha}\langle z, y_1 \rangle - \alpha[\langle y_1, z \rangle - \bar{\alpha}\langle y_1, y_1 \rangle] \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha}\beta - \alpha[\bar{\beta} - \bar{\alpha}\langle y_1, y_1 \rangle].\end{aligned}$$

ان المقدار المحصور بين القوسين [...] يغدو صفرا اذا افترضـنا أن

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}.$$

يترتب على (3) أن $\|z\| = \|x - y\| = \delta$ ، وبالتالي فان معادلتنا تقتضي أن يكون

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2.$$

ولما كان هذا أمرا غير ممكن لاننا نجد عندئذ أن

$$z - \alpha y_1 = x - y_2 \quad \text{حيــث} \quad y_2 = y + \alpha y_1 \in Y$$

فان $\|z-\alpha y_1\| \geq \delta$ وفق تعريف δ • لذا لا يمكن أن تتحقق (5) ، والتمهيدية صحيحة • ∎

ان هدفنا هو تمثيل لفضاء هلبرت على شكل مجموع مباشر بسيط وملائم لانه يفيد من التعامد • ولاستيعاب هذا الوضع وفهم هذه المسألة ، سنقدم أولا مفهوم المجموع المباشر • ان هـذا المفهوم ذو معنى في حالة أي فضاء متجهي ونورده على النحو التالي •

٣-٣-٢ تعريف (المجموع المباشر)

يقال عن فضاء متجهي X انه مجموع مباشر لفضاءين جزئيين Y و Z من X ، ونكتب

$$X = Y \oplus Z,$$

اذا كان لكل عنصر x من X تمثيل وحيد بالشكل

$$x = y + z \qquad y \in Y,\ z \in Z.$$

وعندئذ يسمى Z **المتمم الجبري** لـ Y في X ؛ وبالعكس ، كما يقال عن Y و Z انهما **زوج متتام** من الفضاءات الجزئية من X • ∎

وعلى سبيل المثال ، ان $Y = \mathbf{R}$ فضاء جزئي من المستوي الاقليدي $\mathbf{R}^2$ • ومن الواضح أنه يوجد لـ Y عدد غير منته من المتممات الجبرية في $\mathbf{R}^2$ ، كل منها محور حقيقي ، بيد أن أكثرها ملاءمة هو المتمم العمودي على Y • ويستفاد من هذا لدى اختيارنا جملة احداثية ديكارتية • كذلك ، فاننا نجد الوضع نفسه من وجهة المبدأ في $\mathbf{R}^3$ •

وبصورة مماثلة ، فان اهتمامنا الرئيسي في حالة فضاء هلبرت العام H ينصب على تمثيل H بمجموع مباشر لفضاء جزئي مغلق Y **ومتممه المعامد**

$$Y^{\perp} = \{z \in H \mid z \perp Y\},$$

الذي يتألف من مجموعة كل المتجهات العمودية على Y • وهذا يسدنا بالنتيجة الرئيسية لهذا البند ، والتي تدعى أحيانا **مبرهنة الاسقاط** لاسباب سنقوم بشرحها بعد البرهان •

٣ـ٣ـ٤ مبرهنة (المجموع المباشر)

ليكن Y فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هلبرت H • عندئذ يكون

$$Z = Y^{\perp} \qquad H = Y \oplus Z \qquad (6)$$

البرهـان :

لما كان H تاما و Y مغلقا ، فان Y تام كما تبين المبرهنة ١ـ٤ـ٧ • وبما أن Y محدب ، فانه يترتب على المبرهنة ٣ـ٣ـ١ والتمهيدية ٣ـ٣ـ٢ أنه يوجد لكل x في H عنصر y من Y بحيث يكون

$$z \in Z = Y^{\perp}. \qquad x = y + z \qquad (7)$$

ولاثبات الوحدانية ، نفترض أن

$$x = y + z = y_1 + z_1$$

حيث y و y_1 عنصران من Y وحيث z و z_1 عنصران من Z • وعندئذ يكـون $y - y_1 = z_1 - z$ • وبما أن $y - y_1$ عنصر من Y في حين أن $z_1 - z$ عنصر من Z الذي يساوي $Y^{\perp}$ ، فاننا نستنتج أن $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ ، الامر الذي يقتضي أن يكون $y = y_1$ • لذا فان $z = z_1$ أيضا • ∎

يسمى العنصر y الوارد في (7) **المسقط العمودي** لـ x على Y • (أو اختصارا **مسقط** x على Y) • وقد استوحينا هذه التسمية من الهندسة الابتدائية • [وعلى سبيل المثال ، يمكن أن نأخذ $H = \mathbf{R}^2$ ونسقط أي نقطة $x = (\xi_1, \xi_2)$ على المحور ξ_1 ، الذي يلعب عندئذ دور Y ، ونجد حينئذ أن $y = (\xi_1, 0)$] •

تمرين 2 / P.116

أثبت أن التطبيق: ① $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ هو مؤثر خطي.

$$(\xi, \eta) \to T(\xi, \eta) = (\xi, 0)$$

الحل: هو مؤثر لأنّ منطلقه فضاء متجهي ومستقره فضاء متجهي

لنبرهن الخاصية الخطية:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2, \quad x_1 = (\xi_1, \eta_1)$$
$$x_2 = (\xi_2, \eta_2)$$

ولنبرهن أنّ

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$$

$$T(x_1 + x_2) = T(\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2)$$
$$= T(\xi_1 + \xi_2, 0) = T(\xi_1, 0) + T(\xi_2, 0)$$
$$= Tx_1 + Tx_2$$

محقق، نترك برهان الخاصة الثانية للطالب

② $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(\xi, \eta) \to T(\xi, \eta) = (\gamma\xi, \gamma\eta)$$

البرهان:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2, \quad x_1 = (\xi_1, \eta_1)$$
$$x_2 = (\xi_2, \eta_2)$$

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$$

$$T(x_1 + x_2) = T(\gamma(\xi_1 + \xi_2) + \gamma(\eta_1 + \eta_1))$$
$$= T(\gamma\xi_1, \gamma\eta_1) + T(\gamma\xi_2, \gamma\eta_2)$$
$$= Tx_1 + Tx_2$$

محقق، برهان الخاصة الثانية للطالب.

3/P.116 جد الساحة والمدى والفضاء الصفري لكل من المؤثرات T_1, T_2 في السؤال الثاني.

الحل:

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(\xi, \eta) \longrightarrow T(\xi, \eta) = (\xi, 0)$$

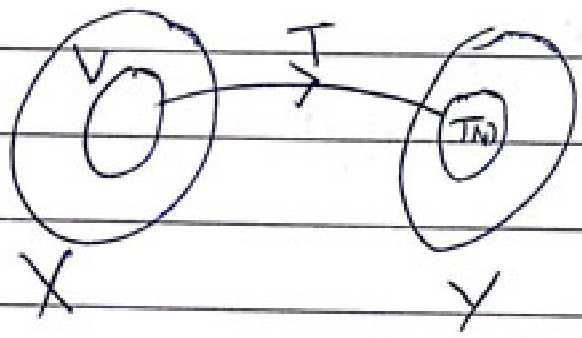
الساحة هي $\mathbb{R}^2$

المدى هو المحور ox وهو فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$.

الفضاء الصفري $N(T)$ هو مجموعة جزئية من المنطلق التي صور عناصرها الشكل $(0,0)$

$$N(T) = \{(\xi, \eta) : T(\xi, \eta) = (0,0)\}$$
$$T(\xi, \eta) = (0,0)$$
$$(\xi, 0) = (0,0) \Rightarrow \xi = 0$$

5/P.117 ليكن $T : X \longrightarrow Y$ مؤثر خطي ، بيّن أنّ الصورة لفضاء جزئي V من X هي فضاء متجهي وأنه كذلك بأن الصورة العكسية لفضاء جزئي W من Y.



$$T : X \longrightarrow Y$$

$$y_1, y_2 \in T(V) \overset{?}{\Rightarrow} \alpha y_1 + \beta y_2 \in T(V)$$
$$y_1 \in T(V) \Rightarrow \exists x_1 \in V \; ; \quad Tx_1 = y_1$$
$$y_2 \in T(V) \Rightarrow \exists x_2 \in V \; ; \quad Tx_2 = y_2$$

ولما كانت V جزئي من X فإن V فضاء متجهي أي

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in V$$
$$\Rightarrow T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$$
$$= \alpha y_1 + \alpha y_2 \in T(V)$$

عربي

٦

١٤ وظيفة

6/P.117

إذا كان جداء (مركب) مؤثرين خطيين موجوداً، فبيّن أنه خطي.

الحل:

$$T_2 , Y \to Z \quad , \quad T_1 : X \to Y$$

$$T_3 = T_2T_1 : X \to Z$$

$$x \mapsto T_3 x = T_2 T_1 x = T_2(T_1(x))$$

$\forall x, y \in X$

$$T_3(x+y) = T_3 x + T_3 y$$

$$T_3(x+y) = T_2(\underbrace{T_1(x+y)}_{\text{خطي}})$$

$$= \underbrace{T_2(T_1(x) + T_1(y))}_{\text{خطي}}$$

شرط الخطية الثاني للطالب

$$= T_2(T_1(x)) + T_2(T_1(y))$$

$$= T_3 x + T_3 y$$

13/P.117

لتكن $T : D(T) \to Y$ مؤثر خطياً موجوداً ، فإذا كانت $\{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطياً في $D(T)$ ، بيّن أن المجموعة $\{Tx_1, \dots, Tx_n\}$ مستقلة خطياً.

الحل:

لتكن لدينا $\{x_1, \dots, x_n\}$ مستقلة خطياً في $D(T)$ أي:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_2 x_n = 0$$

محققة من أجل $\alpha_i = 0$ ، $i = \overline{1, n}$

لنفرض أن المجموعة $\{T_1 x_1, \dots, T_n x_n\}$ غير مستقلة خطياً

$$\alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 Tx_2 + \dots + \alpha_n Tx_n = 0$$

محققة من أجل α_i مغاير للصفر

كون T خطي و T^{-1} موجود $\Leftarrow$ T^{-1} خطي $\Leftarrow$ النواة تحوي الصفر و $(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n)$ شعاع صفري و $T^{-1}(0) = 0$ لأن T متباين وبالتالي:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

FARAH