سؤال امتحانة: اكتب ما تعرفه عن مبرهنة فوبيني ، و ماذا تقرن عن التكامل شرطياً ؟

/ /

( $f_1$ تابع قيوس موجب لكن مكاملته تكامله موجود )

ولنشكل :
$$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu(y)$$

$$\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu(x)$$

عندها نجد :
$$\int_X \varphi(x) \, d\mu(x) = \int_Y \psi(y) \, d\nu(y) = \int_{X \times Y} f \, d\lambda$$

أي إن :
$$\int_{X,Y} f(x,y) \, d\lambda(x,y) = \int_X \left( \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

صفحة ١٠٨ حلة ١٠٩ صفحة ١٠٩ تمرين ① صفحة ١٨٢

---

المحاضرة العاشرة : الأربعاء / ١٢ / ٤ / ٢٠١٦ .

* راجع تمارين الفصل الأول .

هـ أثبت تكافؤ ما يلي :

$\mathcal{A}$ جبر $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ تحقق ما يلي :

① $X \in \mathcal{A}$

② $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

③ $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ .

الإثبات :

نفرض أن $\mathcal{A}$ جبراً تحقق الشروط التالية :

١ـ $\phi, X \in \mathcal{A}$

٢ـ $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B , A \cup B, A - B \in \mathcal{A}$

إن ① و ② محققة كونه $X \in \mathcal{A} \Leftarrow X^c = \phi \in \mathcal{A}$

و أيضاً إذا كانت $A \in \mathcal{A}$ فإن : $X - A \in \mathcal{A}$ أي $A^c \in \mathcal{A}$

و أيضاً $A, B \in \mathcal{A} \Leftarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ من (3)

/ /

الاتجاه الثاني:

- if $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow A^c \cap B^c \in \mathcal{A} \xRightarrow{\text{حسب دو مورغان}} (A \cup B)^c \in \mathcal{A}$$

وبالتالي $A \cup B \in \mathcal{A}$

- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$

$A \cap B^c = A - B$

هام: يبقى التمرين صحيحاً لو وضعنا بدل $\cap$ أي:

$$\left.\begin{cases} X \in \mathcal{A} \\ A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ جبر}$$

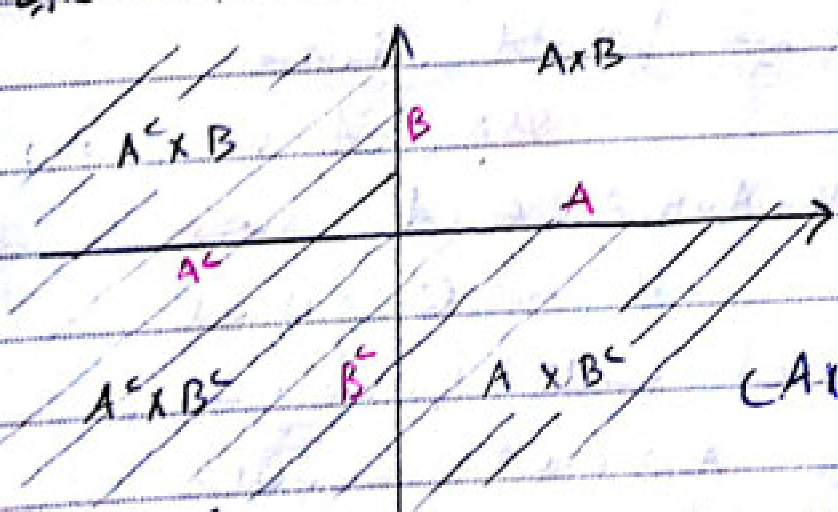
هام جداً: إذا كان R صفاً تحقق ما يلي:

1. $X \in R$
2. $A, B \in R \Rightarrow A \cap B \in R$ "مغلق بالنسبة للتقاطع"
3. $A \in R \Rightarrow A^c = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n \in R \; ; \; R_i \in R, \; i \geq 1$

الشرط الثالث يعني أن ليس بالضرورة أن يكون R مغلق بالنسبة للإتمام ولكنه يكتب على شكل اتحاد منفصل ومحدود من مجموعات R.

فإننا نسمي R صف المستطيلات وهو نصف جبر.

★ وإذا كان $\mathcal{A}$ صف الاتحادات المنتهية لعناصر من R فأثبت أنَّ $\mathcal{A}$ هو جبر/ هو أصغر جبر يحوي R

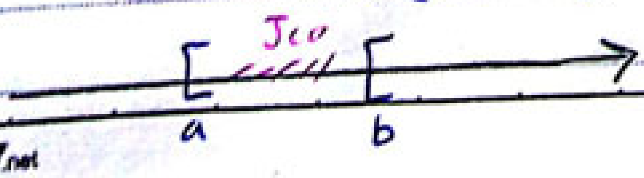



$(A \times B)^c$

نلاحظ من الرسم واضح أن مكملة أي مستطيل ليس بالضرورة مستطيل ولكنه يكتب على شكل اجتماع مستطيلات.

$$(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \cup (A \times B^c)$$

ج) إن صف المجالات التي من الشكل $[a, b[$ حيث $a < b$



/ /

$J_{co} = \{ [a,b[ \; ; \; a \leq b \}$ و

نلاحظ أنه:

① $\phi \in J_{co}$

② $A, B \in J_{co} \Rightarrow A \cap B \in J_{co}$

③ $A \in J_{co} \Rightarrow A^c = A_1 \cup \dots \cup A_n \in J_{co} \; ; \; [A_i]_1^n \in J_{co}$

ونلاحظ أنه مجموعة الشاملة لا تنتمي لـ $J_{co}$

وبالتالي فإننا نلاحظ أنه $J_{co}$ هو نصف حلقة.

النتيجة:

- صف المجالات من النمط $[a,b[$ نصف حلقة.
- صف المستطيلات هو نصف جبر.
- صف المجالات لكهم هو نصف جبر.
- إذا كان $R$ نصف جبر فإن صف الاتحادات المنتهية لعناصر $R$ هو جبر وهو أصغر جبر يحوي $R$.

إثبات النظرية:

$$① \begin{cases} \phi, X \in \mathcal{A} & \text{وضوحاً} \\ R \in \mathcal{A} & \text{نفرض } R = R \cup \phi \cup \phi \cup \dots \end{cases}$$

② $A, B \in \mathcal{A} \overset{?}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{A}, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$

أولاً:

مجموعات اختيارية
$A \in \mathcal{A}$ أي أن $A$ هي اتحاد منتهي لمستطيلات من $R$ $\quad A = R_1 \cup \dots R_n$

$B \in \mathcal{A}$ أي أن $B$ تكتب على شكل اتحاد منتهي لمستطيلات $R$ $\quad B = R_1' \cup \dots \cup R_n'$

حيث $R_1, \dots, R_n, R_1', \dots, R_n' \in R$

كذلك:

$A \cup B = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n \cup R_1' \cup R_2' \cup \dots \cup R_n' \in \mathcal{A}$

أي أنه $A \cup B$ هي مجموعة ابتدائية تكتب على شكل اتحاد منتهي من المستطيلات.

وهذا يعني أن $\mathcal{A}$ مغلقة بالنسبة للاجتماع.

/ /

ثانياً: $cA$ مغلقة بالنسبة للتقاطع:

$$\text{if}\begin{cases}A=R_1\cup R_2\\ B=S_1\cup S_2\end{cases}\text{ then }\begin{cases}A\cup B=R_1\cup R_2\cup S_1\cup S_2\\ A\cap B=(R_1\cup R_2)\cap(S_1\cup S_2)\end{cases}$$

$$=\underbrace{(R_1\cap S_1)}_{\in R}\cup\underbrace{(R_2\cap S_2)}_{\in R}\cup\underbrace{(R_1\cap S_2)}_{\in R}\cup\underbrace{(R_2\cap S_1)}_{\in R}$$

تقاطع مستطيلين مستطيل

نلاحظ أن $A\cap B$ تكتب على شكل اتحاد منته من عناصر $R$ أي أن $A\cap B$ ينتمي لـ $cA$.

ثالثاً: $cA$ مغلقة بالنسبة للإتمام:

$$\text{if } A=R_1\cup R_2\Rightarrow A^c=(R_1\cup R_2)^c=R_1^c\cap R_2^c\in R$$

بما أن $R$ نصف جبر فإن $R_1^c$ تكتب على شكل اتحاد منته من عناصر $R$ (اتحاد منفصل أو غير منفصل)

" " " " " " " " $R_2^c$

وبالتالي $A^c$ تنتمي لـ $cA$.

٥-٤-١ تعريف ص٩٨:

فضاءات الجداء: لنفرض أن $(X,\mathcal{S}),(Y,\mathcal{C})$ فضاءان قيوسان، من أجل كل $A\in\mathcal{S}$ و $B\in\mathcal{C}$ نسمي المجموعة الجزئية $A\times B\subseteq(X\times Y)$ مستطيلاً قيوساً.

إذا كانت $cA$ مجموعة كل الاجتماعات المنتهية لمستطيلات المقيوسة فإننا نسمي $\sigma(cA)$ الجبر التام الجداء أو $\sigma$-جبر جداء ويرمز له بـ $\mathcal{S}\otimes\mathcal{C}$ أي أنه:

ونشير له بـ $\mathcal{C}$، $\sigma(cA)=\mathcal{S}\times\mathcal{C}$

٥-٤-٢ توطئة: إذا كانت $cA$ كما في التعريف السابق فإنها جبر.

البرهان:

أ- إنه $\mathcal{A}$ مغلقة بالنسبة للاجتماع المنتهي لعناصر من $\mathcal{A}$ هو من $\mathcal{A}$

ب- لنثبت أنه $\mathcal{A}$ مغلقة بالنسبة للتتميم.

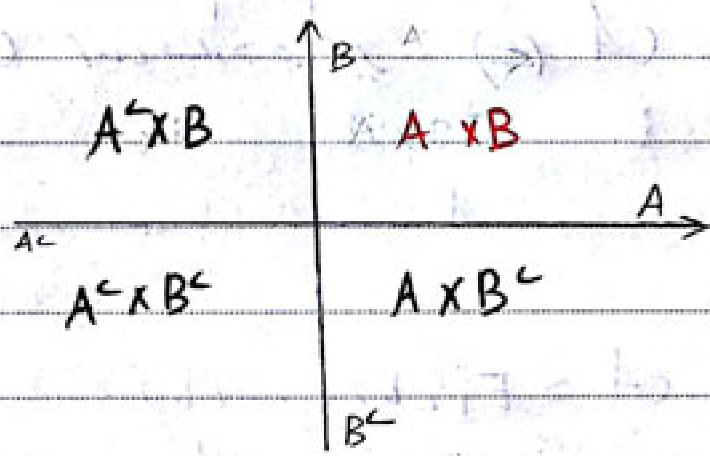
سنبرهن أولاً أنه متممة أي مستطيل قيوس هي من $\mathcal{A}$.

نفرض أن $A \times B$ مستطيل قيوس في $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ ومنه:

$$(A \times B)^c = (\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) \setminus (A \times B) = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$$

الطرف الأيمن من المساواة هو اجتماع ثلاثة مستطيلات قيوسة ومن ثم فإنه من $\mathcal{A}$، أي أن متممة مستطيل قيوس هي من $\mathcal{A}$

(تعني المركبة الأولى مجموعة قيوسة والمركبة الثانية قيوسة).
$\{(A \times B) ; A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}\}$
كما في الطبولوجيا.
نقول صف المستطيلات المفتوحة.
$\{\underset{\text{مفتوحة}}{O_1} \times \underset{\text{مفتوحة}}{O_2} : O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$




* إذا كانت $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ و $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}, \nu)$ فضائين قيوسين فإن:

$$R = \{A \times B : A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}\}$$

صف المستطيلات القيوسة هو نصف جبر:

البرهان:

1) $Z = \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \in R$ واضح

2) $\left.\begin{array}{l} R = A \times B \\ R' = A' \times B' \end{array}\right\} \Rightarrow R \cap R' = (\underbrace{A \cap A'}_{\in \mathcal{S}}) \times (\underbrace{B \cap B'}_{\in \mathcal{T}})$ تقاطع مستطيلين مستطيل

3) $(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \cup (A \times B^c)$

/ /

تذكر تعريف الصف المطرد: هو صف من أجزاء $X$ إذا حوى متتالية متزايدة فحوي اجتماعها، وإذا حوى متتالية متناقصة فحوي تقاطعها.

وإن كل جبر تام هو صف مطرد وكل حلقة تامة هي صف مطرد ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة.

تمرين:
أثبت أن كل صف مطرد سيكون جبراً تاماً إذا كان جبراً.

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ صف مطرد وجبر } \Rightarrow \mathcal{A} \text{ جبراً تاماً.}}$$

الإثبات: حتى يتم المطلوب يجب أنه نبرهن أن $\mathcal{A}$ مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود بلانهاية.

⇐ واضح

⇒ لنأخذ $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ متتالية من $\mathcal{A}$ من المجموعات القيوسة.

ولتكن $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \overset{?}{\in} \mathcal{A}$

نفرض أن:

$$A_1 = E_1$$
$$A_2 = E_1 \cup E_2$$
$$\vdots$$
$$A_n = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$$

نلاحظ أن المتتالية $A_n$ هي متتالية متزايدة من عناصر الجبر $\mathcal{A}$ وهو مغلق بالنسبة للاتحاد المنتهي أي أن: $A_1 \cup \dots \cup A_n = E_1 \cup \dots \cup E_n$

بل إنه:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E \in \mathcal{A}$$

لأن $\mathcal{A}$ جبراً تاماً.

/ /

$\sigma(\mathcal{C})$ : يعني هو أصغر جبر تام يحوي $\mathcal{C}$ أو نقول هو أصغر جبر تام مولد بـ $\mathcal{C}$.

$\mathcal{M}(\mathcal{C})$ : يعني أصغر صف مطرد يحوي $\mathcal{C}$ أو نقول الصف المطرد المولد بـ $\mathcal{C}$.

س٩٦ : اذكر نظرية (مبرهنة) الصف المطرد الأصغري مع شرح رموزها. سؤال امتحان 23 كلام

إذا كانت الجماعة $\mathcal{A}$ جبراً في المجموعة $X$ فإن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$

(أي إن أصغر صف يحوي جبراً $\mathcal{A}$ لا بد وأنه يحوي $\hat{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A})$ بل ويساويه).

فكرة الإثبات:

إن أي جبر تام في مجموعة هو صف مطرد في هذه المجموعة ومن ثم فإن $\sigma(\mathcal{A})$ صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$.

ولما كان $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ هو أصغر صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$ فإن:

$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

والمطلوب إثبات $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$

للبرهان على ذلك يكفي إثبات أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبر.

بالتالي حسب مبرهنة سابقة إذا كان $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبر وهو صف مطرد $\Rightarrow$ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبر تام،

ثم بما أن $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ولأن $\sigma(\mathcal{A})$ هو أصغر جبر تام يحوي $\mathcal{A}$ فإن

$\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ أصغر جبر تام

الإثبات:

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبر $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} ① \; X \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \\ ② \; A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \\ ③ \; A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \end{cases}$$

والآن هنا لنشكل صف المجموعات:

$\mathcal{S} = \{E \subseteq X \; ; \; E^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ حيث $c$ Complement.

إن $\mathcal{S}$ صف غير خالٍ لأن جميع عناصر $\mathcal{A}$ تنتمي إلى $\mathcal{S}$ أي:

إذا كانت $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ وبالتالي حسب تعريف $\mathcal{S}$

$E \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$

$A \in \mathcal{A}$ ، $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ وفقاً $\Big\} \Rightarrow A \cup E \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\text{حسب تعريف}} A \in S_E$ ، حالة $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

$\Uparrow$

$\mathcal{A} \subseteq S_E \rightarrow$ أ جميع صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq S_E$ //

إذا أثبتنا أن $S$ صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$ فإنه يحوي $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (أصغر صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$)، والإثبات في الكتاب.

لذلك: $\forall E \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \xRightarrow[\text{لأن } \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ أصغر صف مطرد يحوي } \mathcal{A}]{\text{مطرد}} E \in S \xRightarrow{\text{حسب تعريف } S \text{ كونه صف}} E^c \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$

$\Leftarrow$ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ مغلق بالنسبة للتتميم.

(ب) سنثبت أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ مغلق بالنسبة للاجتماع المنتهي.

من أجل ذلك يكفي أن نثبت أنه مغلق بالنسبة لاجتماع أي عنصرين من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

لنثبّت أي مجموعة جزئية $G \subseteq X$ ولنضع:

$$S_G = \{E \subseteq X : E \cup G \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

نثبت أن $S_G$ صف مطرد (الإثبات في الكتاب).

سنثبت أنه يحوي الجبر $\mathcal{A}$ ونميز حالتين حتى نصل للمطلوب.

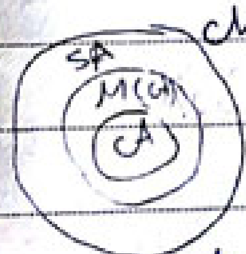
① نأخذ الآن $A \in \mathcal{A}$ ولنضع: $S_A = \{E \subseteq X : E \cup A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$

إن $\boxed{\mathcal{A} \subseteq S_A}$ لأنه إذا كانت $E \in \mathcal{A}$ فإنه $E \cup A \in \mathcal{A}$ لأنه جبر

ولما كانت $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ فإن: $E \cup A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ وبالتالي حسب تعريف $S_A$

يكون $S_A \ni E \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq S_A$

ولما كانت $S_A$ صفاً مطرداً يحوي $\mathcal{A}$ فإن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq S_A$ أي أنه إذا كانت $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ فإن $E \in S_A$ يعني أن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \ni E \cup A$




② نأخذ الآن $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ولنضع $S_E = \{G \subseteq X : G \cup E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$

بيّنا آنفاً أنه إذا كانت $A \in \mathcal{A}$ و $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ $\Rightarrow A \cup E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

$\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq S_E$ وذلك لأجل كل $A \in \mathcal{A}$ فإنه $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \ni A \cup E$

أي:

$A \in S_E$ ، ولما كان $S_E$ صفاً مطرداً يحوي $\mathcal{A}$ فإن.

$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq S_E$

أي أنه إذا كانت $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \ni F \Rightarrow S_E \ni F$

معناه يعني $F \cup E$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ #

/ /

مراجعة: إذا كان $(X, m, \mu)$ فضاءً مقيساً ف:

$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}(x)$ تابع درجي.

فإننا نسمي التكامل $\int \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k)$ تكامل تابع درجي

وفي الاحتمالات نسميه تابع توزيع احتمالي.

☆ إذا كان $f$ تابع قيوس فإن التكامل التالي:

$\sup_{\varphi} \int_X \varphi \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ . : $0 \leq \varphi \leq f$. موجود.

ويسمى تكامل لوبيغ.

حيث $f$ كمول وحقيقي : $\int |f| \, d\mu < \infty \Leftrightarrow \int f = \int f^+ - \int f^-$

☆ أهم مبرهنات الفصل الرابع ☆

- مبرهنة لوبيغ الأولى:

إذا كانت $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ متتالية من التوابع القيوسة الموجبة وكانت هذه المتتالية متزايدة.

$\forall x : \quad 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots$

وإذا كان: $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ فإن $f$ تطبيق قيوس و

$$\int_X f \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu .$$

- توطئة فاتو:

إذا كانت $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ متتالية من التوابع القيوسة الموجبة فإن:

$$\int_X \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu .$$

أي إن: تكامل النهاية الدنيا للمتتالية $(f_n)_{n \geq 1}$ لا يتجاوز النهاية الدنيا لمتتالية التكاملات.

/ /

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k} \quad , \quad \psi = \sum_{j=1}^{M} d_j \chi_{B_j}$$

عندئذٍ :

① $\varphi + \psi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} (c_k + d_j)\, \chi_{A_k \cap B_j}$ تابع درجي .

② $\varphi . \psi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} (c_k . d_j)\, \chi_{A_k \cap B_j}$ تابع درجي .

③ $\lambda . \varphi = \sum_{k=1}^{N} (\lambda c_k)\, \chi_{A_k}$ تابع درجي .

وأيضاً sup مجموعة توابع درجية و inf مجموعة توابع درجية هو تابع درجي .
ونستنتج أيضاً أن مجموعة التوابع الدرجية تمثل فضاء متجهي .

تذكر أن :

- $\chi_{E \cap F} = \chi_E . \chi_F$
- $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F \quad \text{if } E \cap F = \phi$

حيث :

$$\chi_{A_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A_k \\ 0 & \text{if } x \notin A_k \end{cases}$$

الدالة المميزة للمجموعة $A_k$ .

تعريف تكامل دالة درجية على مجموعة قيوسة $E \in m\rho$ :

إذا بأخذ $E = X$ نرجع للتعريف الأول

لدينا تعريفاً :

$$\int_E \varphi\, d\mu := \int_X (\chi_E . \varphi)\, d\mu$$

في الحالة العامة عندما نكتب $\int \varphi$ يعني المقصود $\int_X \varphi\, d\mu$ .

$$\chi_E \varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k . \chi_{A_k} . \chi_E$$

$$\Rightarrow \chi_E \varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k . \chi_{A_k \cap E}$$

$$\Rightarrow \int_X \chi_E \varphi\, d\mu = \sum_{k=1}^{N} c_k \int_X \chi_{A_k \cap E}$$

نكامل الطرفين على $E \in m\rho$

/ /

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k \int_X \chi_{A_k \cap E} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap E).$$

إذن:
$$\int_E \varphi d\mu = \int_X \chi_E \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap E).$$

$\boxed{\text{هامة } \infty}$

**تتمات تمارين الفصل الرابع**

$\boxed{1}$ إذا كانت $\varphi$ دالة درجية في الفضاء $(X, S, \mu)$ و $G$ و $F$ مجموعتين مقيوستين منفصلتين فإنه:

$$\int_{F \sqcup G} \varphi d\mu = \int_F \varphi d\mu + \int_G \varphi d\mu$$

إذا أثبتنا $\varphi$ تابع درجي موجب (كل قيمه موجبة) ، ووضعنا $\nu(E) = \int_E \varphi d\mu$ فنحصل على قياس جديد $\nu$
يعني التابع الدرجي مولد قياس $\nu$ ، ونثبت ذلك:

$$① \ \nu(\phi) = \int_\phi \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap \phi) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(\phi) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot 0 = 0$$ لأنه $\mu$ قياس.

$$② \ \nu(F \sqcup G) = \int_{F \sqcup G} \varphi d\mu \overset{?}{=} \int_F \varphi d\mu + \int_G \varphi d\mu = \nu(F) + \nu(G).$$

المطلوب إثباته وهو نفس التمرين الأول

**الإثبات:**

ليكن $(X, S, \mu)$ فضاء قياس وليكن:

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x).$$

حيث $\{A_i\}_{i \geq 1}$ تجزئة لـ $X$ و $\{c_i\}_{i \geq 1}$ أعداد مختلفة مثنى مثنى.

نعلم أنه إذا كانت $E \in S$ فإنه:
$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap E)$$

وإذا كانت $E = F \sqcup G$ فإنه:

$$\int_{F \sqcup G} \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap (F \sqcup G)) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu((A_k \cap F) \sqcup (A_k \cap G)).$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap F) + \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap G) = \int_F \varphi d\mu + \int_G \varphi d\mu$$

لأنه الاتحاد منفصل و $\mu$ قياس.

/ /

<u>نتيجة</u> : كل دالة درجية موجبة تولد قياس .

وإذا كانت $F_n \nearrow F \Longleftarrow \int F_n \nearrow \int F$

وبالتالي $\nu(F_n) \nearrow \nu(F)$ .

ج_ إذا كانت $\varphi, \psi$ دالتين درجيتين في الفضاء $(X, \mathcal{B}, \mu)$ أثبت:

مكتوبتان بالشكل النموذجي فإن: $\psi = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j}$ , $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$

$$\int_X (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu + \int_X \psi\, d\mu .$$

<u>الحل</u> : نقصد بالشكل النموذجي أي أن: $E_i = \{x : \varphi(x) = \alpha_i\}$

$F_j = \{x : \psi(x) = \beta_j\}$

موجود صفحة ١٩٦ :

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}$$

نكامل الطرفين:

تكامل دالة مميزة لمجموعة = قياسها.

$$\int_X (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j)\, \mu(E_i \cap F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i\, \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big( \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j) \Big) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \Big( \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j) \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu(E_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \mu(F_j)$$

$$\Rightarrow \int_X (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu + \int_X \psi\, d\mu .$$

③ إذا كان $f, g$ قيوسين موجبين ($f \geqslant 0$ , $g \geqslant 0$) في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$

فإن: $\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu$

جبرهن مع نتيجة ومطلوب إثباتها.

الحل: حتى نستطيع إثبات ذلك سنتحين عبرهنة لوبيغ الأولى للتوابع القيوسة.

بوجود جهة لم ما تذاع إلى مبرهنة سابقة [كل دالة قيوسة هي نهاية لمتتالية من التوابع متزايدة من التوابع الدرجية (البسيطة) الموجبة]

إذن:

لدينا • $f \geqslant 0$ قيوس موجب $\Leftarrow$ يوجد متتالية من التوابع الدرجية الموجبة $\varphi_n$ بحيث:

$$\varphi_n \nearrow f \Rightarrow \int \varphi_n \nearrow \int f$$

• $g \geqslant 0$ قيوس موجب $\Leftarrow$ يوجد متتالية من التوابع الدرجية الموجبة $\psi_n$ بحيث:

$$\psi_n \nearrow g \Rightarrow \int \psi_n \nearrow \int g$$

نلاحظ أن: $\varphi_n + \psi_n \nearrow f+g \Rightarrow \int(\varphi_n + \psi_n) \nearrow \int(f+g)$

من جهة أخرى $\int(\varphi_n + \psi_n) = \int \varphi_n + \int \psi_n \nearrow \int f + \int g$

وبالتالي أصبح لدينا: $\int (f+g) = \int f + \int g$ .

نتيجة: (مبرهنة Beppo_Lévi) رسم مبرهنة لوبيغ.

إذا كانت $(f_n)_{n \geqslant 1}$ متتالية من التطبيقات القيوسة الموجبة فإنه:

تكامل السلسلة = سلسلة التكاملات، $\int_X \sum f_n\, d\mu = \sum \int_X f_n\, d\mu$

لكفي أن نلاحظ أنه $\int_X \sum_{n=1}^{m} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{m} \int_X f_n\, d\mu$ المجموع جزئي

فإذا وضعنا $h_m = \sum_{n=1}^{m} f_n = f_1 + f_2 + \dots + f_m$

كانت المتتالية $(h_m)_{m \geqslant 1}$ متتالية متزايدة من التوابع القيوسة الموجبة نهايتها $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = h$

عندما $m \to \infty$

فلنطبق مبرهنة التقارب المتزايد مرة ثانية فنجد:

$$\int_X h\, d\mu = \lim_{m \to \infty} \int_X h_m\, d\mu = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \left( \int_X f_n\, d\mu \right)$$

[5] إذا كانت $f = g - h$ حيث $g, h \geq 0$ قابلتين للتكامل فإن $f$ قابلة للتكامل و:

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu - \int_X h\, d\mu$$

المطلوب إثبات ① $f$ قابلة للتكامل.
② $\int f = \int g - \int h$

الحل: ① نقول عن $f$ أنه قابلة للتكامل إذا وفقط إذا كانت $\int_X |f|\, d\mu < \infty$.

$f = g - h$ وبالتالي:

$$|f| \leq |g| + |h|$$

$$\Rightarrow \int |f| \leq \int |g| + \int |h| < \infty \Rightarrow \int |f| < \infty \Leftrightarrow$$ $f$ قابلة للتكامل.

② لدينا $g$ و $h$ قيوسان موجبان

نكتب $f = f^+ - f^-$ ومنه:

$$f = f^+ - f^- = g - h$$

$$\Rightarrow f^+ + h = g + f^-$$

نعلم أن تكامل تابعين موجبين = مجموع تكامليهما

$$\Rightarrow \int (f^+ + h) = \int (g + f^-)$$

$$\Rightarrow \int f^+ + \int h = \int g + \int f^-$$

$$\Rightarrow \int f^+ - \int f^- = \int g - \int h$$

لدينا تعريفاً:

$$\int f = \int f - \int f^- \Rightarrow$$

$$\int f = \int g - \int h \quad \#$$

/ /

(تعميم لرقم 5) $\boxed{6}$ إذا كانت $g$ ، $f$ كوشية فإن: $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$

**الحل:** إن كل من التوابع $h$ ، $g$ ، $f$ تكتب بالشكل:

$$f = f^+ - f^- \quad , \quad g = g^+ - g^- \quad , \quad h = h^+ - h^-$$

حيث: $h = f+g$ حينئذٍ:

$$h = h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow \underbrace{h^+ + f^- + g^-}_{\geq 0} = \underbrace{f^+ + g^+ + h^-}_{\geq 0}$$

أصبح لدينا في الطرفين توابع موجبة نكامل:

$$\Rightarrow \int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-$$

لأن $f$ و $g$ كوشية فيمكن أن نكتب:

$$\Rightarrow \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-$$

$$\xRightarrow{\text{تعريفاً}} \int h = \int f + \int g$$

---

ما هو نص توطئة فاتو وأثبتها استناداً إلى مبرهنة التقارب الرتيب (الرتيب الأولى)

أثبتها حتماً

ص٨٩ توطئة فاتو للدوال القيوسة الموجبة:

إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال ~~الموجبة~~ القيوسة الموجبة فإن

$$\int_X \underline{\lim}\, f_n\,d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n\,d\mu$$

أي أن تكامل النهاية الدنيا لـ $(f_n)$ لا يتجاوز النهاية الدنيا لمتتالية التكاملات.

البرهان:

لدينا $f_1 , f_2 , \dots , f_n , \dots \geq 0$ متتالية من التوابع القيوسة الموجبة،

لنشكل المتتالية الجديدة: $g_1 = \inf\{f_1, f_2, \dots f_n, \dots\} \leq f_1$

$$g_2 = \inf\{f_2, f_3, \dots f_n, \dots\} \leq f_2$$

$\vdots$

/ /

6 إذا كانت $f$ , $g$ تكامليتين فإن: $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$ (التعميم لرقم 5)

الحل: إن كل من التوابع $f$ , $g$ , $h$ تكتب بالشكل:

$$f = f^+ - f^- \quad , \quad g = g^+ - g^- \quad , \quad h = h^+ - h^-$$

حيث: $h = f + g$ وعندئذٍ:

$$h = h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow \underbrace{h^+ + f^- + g^-}_{\geq 0} = \underbrace{f^+ + g^+ + h^-}_{\geq 0}$$

أصبح لدينا في الطرفين توابع موجبة فيمكن مكاملتها،

$$\Rightarrow \int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-$$

لأن $f$ و $g$ تكامليتين فيمكن أن نكتب:

$$\Rightarrow \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-$$

$$\xrightarrow{\text{تعريفاً}} \int h = \int f + \int g$$

---

ما هو نص توطئة فاتو ، أثبتها استناداً إلى مبرهنة التقارب برتابة (لوبيغ الأولى)

أثبتها حتماً

ص ٨٩ توطئة فاتو للدوال القيوسة الموجبة:

إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متوالية من الدوال ~~الموجبة~~ القيوسة الموجبة فإن

$$\int_X \underline{\lim}\, f_n\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n\, d\mu$$

أي أن تكامل النهاية الدنيا لـ $(f_n)$ لا يتجاوز النهاية الدنيا لمتتالية التكاملات.

البرهان:

لدينا $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \geq 0$ متتالية من التوابع القيوسة الموجبة،

لنشكل المتتالية الجديدة:

$$g_1 = \inf\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\} \leq f_1$$

$$g_2 = \inf\{f_2, f_3, \dots, f_n, \dots\} \leq f_2$$

$\vdots$

/ /

**ملاحظة أساسية:**

if $a_n \leq b_n$

ثابتان a,b حيث

$a_n \to a$

$b_n \to b$

$\Rightarrow a \leq b$

وكذلك $\underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$

$$g_3 = \inf \{ g, f_4, \dots \} \leq f_3$$

$$\vdots$$

$$g_n = \inf \{ f_n, f_{n+1}, \dots \} \leq f_n .$$

إن $(g_n)_{n \geq 1}$ متتالية متزايدة من التوابع المقيسة الموجبة.

$g_n$ متزايدة ومتقاربة. فهي متقاربة من طرفيها $\leftarrow \lim g = \overline{\lim}\, g = \underline{\lim}\, g$

ولدينا تعريفاً: $* \; \lim g_n = \underline{\lim}\, f_n$

لدينا $g_n \leq f_n \quad . \quad (\forall n)$

لنأخذ تكامل الطرفين: $\int g_n \leq \int f_n$

بأخذ النهايات الدنيا للطرفين نجد أن:

$$\underline{\lim} \int g_n \leq \underline{\lim} \int f_n$$

ولكنّ الطرف الأيسر يمكن أن يكتب بالشكل:

$$\underline{\lim} \int g_n = \int \underline{\lim}\, g_n$$

وذلك حسب مبرهنة لوبيغ الأولى.

« $g_n$ متتالية متزايدة ومتقاربة وبالتالي $\int g_n$ متتالية متزايدة موجبة فهي متقاربة»

وبالتالي:

$$\underline{\lim} \int g_n = \int \underline{\lim}\, g_n = \int \lim g_n \leq \underline{\lim} \int f_n$$

ومنه حسب $*$ $\int \underline{\lim}\, f_n \leq \underline{\lim} \int f_n .$

انتهت المحاضرة.