13-4-2017

٤

نظري

◄ دكتور المادة: ملك مارديني

◄ المحاضرة الحادية عشر

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الجزئية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـمنشأ المعادلات التفاضلية الجزئية.

٢ـأمثلة وتعاريف.

منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية :

إن معظم المعادلات التفاضلية الجزئية التي مرت معنا هي عبارة عن معادلة جبرية لكنها تحوي على عدد من الوسطاء وبحذف هذه الوسطاء نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية وهذه الوسطاء إما أن تكون **ثوابت كيفية أو دوال كيفية.**

أولاً: في حال كانت الوسطاء ثوابت كيفية :

١) قد تكون العلاقة الجبرية تحوي على ثابت اختياري واحد فقط فتكون من الشكل $F(x, y, z, C_1) = 0$ عندئذ نحذف الثابت باتباع الخطوات التالية:

- نشتق بالنسبة ل x فنحصل على المعادلة رقم (١) حيث : $G_1(x, y, z, p) = 0 : p = \frac{\partial z}{\partial x}$
- نشتق بالنسبة ل y فنحصل على المعادلة رقم (٢) حيث: $G_2(x, y, z, q) = 0 : q = \frac{\partial z}{\partial y}$

من المعادلتين (١) و (٢) نقوم بحذف الثابت وفي المثال يتضح المقال:

أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من المعادلة الجبرية التالية:

$$z = Cxy$$

نلاحظ أن z عبارة عن علاقة تربط بين (الثابت$x \& y \& C$) نوجد المشتق بالنسبة ل x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P = Cy \Longrightarrow C = \frac{P}{y} \dots \dots \dots (1)$$

نوجد المشتق بالنسبة ل y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = Cx \Longrightarrow C = \frac{q}{x} \dots \dots \dots (2)$$

بالمساواة بين (١) و(٢) نجد : $\frac{p}{y} = \frac{q}{x} \rightarrow yq = xp$

وهي المعادلة التفاضلية الجزئية المطلوبة ....

٢) في حال العلاقة الجبرية تحوي على ثابتين اختياريين $F(x, y, z, C_1, C_2) = 0$ في هذه الحالة :

- نشتق العلاقة بالنسبة ل x ومنه : $G_1(x, y, z, p) = 0 \dots \dots \dots (1)$
- نشتق بالنسبة ل y ومنه $G_2(x, y, z, q) = 0 \dots \dots \dots (2)$
- ثم نقوم بعزل الثوابت من (١) و(٢) وتعويضها في المعادلة الأصلية .

مثال: أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 + z^2 = 1$

نلاحظ وجود ثابتين وبالتالي نتبع الخطوات السابقة :

- نشتق بالنسبة ل x

$$2(x - C_1) + 2zp = 0 : z = z(x, y) \;\&\&\; p = \frac{\partial z}{\partial x} \rightarrow (x - C_1) = -zp$$

لنوجد المشتق بالنسبة ل y

$$2(y - C_2) + 2zq = 0 \rightarrow (y - C_2) = -zq$$

نعوض المشتقات في المعادلة الأصلية ومنه :

$$(-zp)^2 + (-zq)^2 + z^2 = 1 \rightarrow z^2p^2 + z^2q^2 + z^2 = 1 \xRightarrow{\text{باخراج } z^2 \text{ عامل مشترك}}$$

وهي المعادلة التفاضلية المرجوة $z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$

٣) في حال كانت العلاقة تحوي على ثلاث ثوابت اختيارية $F(x, y, z, C_1, C_2, C_3) = 0$

- نشتق F بالنسبة ل x $G_1(x, y, z, p) = 0$
- نشتق F بالنسبة ل y $G_2(x, y, z, q) = 0$

- ثم نشتق G_1 بالنسبة ل x, y أي نوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
- وكذلك نشتق G_2 بالنسبة ل x, y

مثال : أوجد م.ت.ج من المعادلة الجبرية التالية:

$$ax + by + cz = 1$$

الحل:

- نشتق بالنسبة ل x ومنه $G_1 = a + cp = 0 : p = \frac{\partial z}{\partial x}$
- نشتق بالنسبة ل y ومنه $G_2 = b + cq = 0 : q = \frac{\partial z}{\partial y}$
- نشتق G_1 بالنسبة ل x ومنه : $c.r = 0 : r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
- نشتق G_1 بالنسبة ل y ومنه : $cS = 0 : S = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
- نشتق G_2 بالنسبة ل x ومنه : $cS = 0 \quad : \quad S = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
- نشتق G_2 بالنسبة ل y ومنه : $cb = 0 : b = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

وهي المعادلة المطلوبة........

الخلاصة من أولاً:

١) إذا كان عدد الثوابت الاختيارية يساوي عدد المتغيرات المستقلة فإننا نحصل على معادلة تفاضلية جزئية تقبل المعادلة الجبرية حلاً لها.

٢) إذا كان عدد الثوابت الاختيارية يزيد أو يقل عن عدد المتغيرات المستقلة فإننا نحصل على معادلات تفاضلية جزئية تقبل المعادلة الجبرية حلاً لها.

ثانياً: الوسطاء هي دوال كيفية

١) إذا كانت العلاقة تحتوي على دوال اختيارية تتعلق بدالة معلومة $g = g\big(u(x, y, z)\big)$ ولتكن $F(x, y, z)$ حيث $z = z(x, y)$ وبفرض أن g دالة اختيارية تتعلق بالدالة المعلومة $u(x, y, z)$ و F دالة معلومة أيضاً **عندئذ**

نشتق بالنسبة لكل من x, y ونحذف الدالة.

مثال: أوجد م.ت.ج من المعادلة الجبرية .

$$x^2+y^2+z^2=g(2x+y)$$

الحل: نلاحظ أن الدالة $u=(2x+y)$ ومنه نشتق المعادلة بالنسبة ل x

$$2x+2zp=2g' \rightarrow x+zp=g'$$

بالاشتقاق بالنسبة ل y نجد : $2y+2zq=g'$

من العلاقتين الناتجتين عن الاشتقاق بالنسبة ل $(x\&\&y)$ نجد:

$$x+zp=2y+2zq \rightarrow (2y-x)+z(2q-p)=0$$

وهي المعادلة التفاضلية الجزئية المطلوبة.......

٢) إذا كانت العلاقة تحتوي على دالتين اختياريتين كلاهما يتعلقان بدالة معلومة من الشكل $z=F\big(u(x,y,z)\big)+g\big(v(x,y,z)\big)$ حيث كل من $(u\ \&\&\ v)$ دالة معلومة و $(F\ \&\ g)$ دوال اختيارية عندها لإيجاد المعادلة نشتق مرتين بالنسبة ل $(x\ \&\&\ y)$ وبحذف الدالتين Fوg من العلاقات الناتجة نحصل على المعادلة المطلوبة........

مثال: أوجد م.ت.ج حيث العلاقة الجبرية هي : $z=F(x+Cy)+g(x-Cy)$

الحل: لدينا $u(x,y)=x+Cy\ : F=F(u)\&\&v(x,y)=x-Cy : g=g(v)$

نشتق بالنسبة ل x حيث $z=z(F,g)$ ومنه:

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}$ وكون F تابعة ل u والدالة g تابعة ل v فإن:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dF}{du}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dg}{dv}.\frac{\partial v}{\partial x}\rightarrow p=F'.1+g'.1=F'+g'$$

نشتق مرة ثانية بالنسبة ل x ومنه:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\rightarrow r=p'=F"+g"\quad \dots\dots\dots(\#)$$

نشتق المعادلة الأصلية بالنسبة ل y ومنه:

$$q=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{dF}{du}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{dg}{dv}.\frac{\partial v}{\partial y}\rightarrow q=F'c-g'c$$

نشتق مرة ثانية بالنسبة ل y ومنه:

$$t=\frac{\partial F'}{\partial y}+\frac{\partial g'}{\partial y}=\frac{dF'}{du}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{dg'}{dv}.\frac{\partial v}{\partial y}\rightarrow t=c^2F+c^2g=c^2[F''+g'']$$

من (#) نجد $F''+g''=r$ ومنه $t=rc^2$ وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.....

٣) المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى من الشكل :

$$F(x,y,z,p,q)=0\ \dots\dots\dots\dots(1)$$
$$:p=\frac{\partial z}{\partial x}\quad,\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}\quad,\qquad z=z(x,y)$$

يكون الحل التام لها هو كل حل يحوي على عدد من الثوابت الاختيارية يساوي إلى عدد من المتغيرات المستقلة وهو من الشكل : $F(x,y,z,C_1,C_2)=0\ \dots\dots\dots\dots(2)$

وهو يمثل عدد لا نهائي من السطوح التكاملية للمعادلة $F(x,y,z,p,q)=0$ والتي تختلف فيما بينها بقيم الثوابت C_1,C_2.

المغلف: هو ذلك المنحني الذي يمس في كل نقطة من نقاطه أحد السطوح التكاملية .

الحل الشاذ: لتكن المعادلة (٢) هي الحل التام للمعادلة (١) عندئذ إذا كان هناك مغلفاً لهذه السطوح معادلته تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية رقم (١) عندها نسمي المغلق إن وجد بالحل الشاذ للمعادلة التفاضلية الجزئية رقم (١) ..

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه