الموضوع: المحاضرة السادسة جبر خطي [illegible] التاريخ ١٠ / ٥ / ٢٠١٧

[illegible] تمرين [illegible] ثم حل الفصل الخامس

تمرين:

ليكن لدينا الشكل الخطي $\varphi: R^3 \times R^2 \to R$

المعرف كما يلي:

$$\varphi(v,w) = 2xy' + y(-2x' + y') + z x'$$

حيث: $v = (x,y,z) \in V = R^3$

$w = (x',y') \in W = R^2$

① هل الشعاع $v(1,2,3)$ يعامد الشعاع $w(1,-1)$

$$\varphi(v,w) = 2(1)(-1) + (2)(-2(1) + (-1)) + (3)(1)$$
$$= -2 - 6 + 3 = -5 \neq 0$$

لا يعامده

② هل الشعاع $v(1,1,2)$ يعامد الشعاع $w(3,0)$

$$\varphi(v,w) = 2(1)(0) + (1)(-2(3) + (0)) + (2)(3)$$
$$= 0 - 6 + 6 = 0$$

يعامده

③ هل الشعاع $w(3,0)$ يعامد الشعاع $v(1,1,2)$

لا يجوز الحديث بهذا الشكل لأنه $\varphi(w,v)$

غير معرف فلا يمكن حتى أن نقول أنه لا يعامده

لأنه في هذه $w \in R^2$

$v \in R^3$ لا يمكن التبديل

بينهم

4) أوجد مصفوفة φ في الأسس القانونية المرتبة

$$E = \{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$B = \{b_1=(1,1), b_2=(1,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$A = a_{ij} = \varphi(e_i, b_j) \; ; \; i = 1.2.3$$
$$j = 1.2$$

$$a_{11} = \varphi(e_1, b_1) = 2$$
$$a_{12} = \varphi(e_1, b_2) = -2$$
$$a_{21} = \varphi(e_2, b_1) = -1$$
$$a_{22} = \varphi(e_2, b_2) = -3$$
$$a_{31} = \varphi(e_3, b_1) = 1$$
$$a_{32} = \varphi(e_3, b_2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

عدد صفوفها 3

عدد أعمدتها 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) أوجد مصفوفة φ في V بالنسبة لـ ($W^\perp$)

$$W^\perp = \{v \in V \; ; \; \varphi(v,w) = 0 \; ; \forall w \in W\} \subseteq V$$

نعوض هنا بـ w

$$w = (x', y') = e_1 = (1,0)$$

$$\varphi = 2x(0) + y(-2+0) + z(1) = 0$$

$$\Rightarrow -2y + z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 2y}$$

$w = e_2 = (0,1)$

$\mathcal{U} = 2x + y(-x(0) + 1) - 3(0) = 0$

$\Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow \boxed{-2x = y}$

$I = 2y = -4x$

$3 \Rightarrow y = -2x$

$w^{\perp} = \{ v = (x, -2x, -4x) ; x \in \mathbb{R} \}$

6) احسب نواة $\mathcal{U}$ في W ($V^{\perp}$)

$V^{\perp} = \{ w \in W ; \mathcal{U}(v, w) = 0 ; \forall v \in V \} \subseteq W$

$v = (x', y', z') = e_1 = (1, 0, 0)$

$\mathcal{U} = 2y' = 0 \Rightarrow y' = 0$

$v = e_2 = (0, 1, 0)$

$\mathcal{U} = -2x' + y' = 0 \Rightarrow \ldots x$

$v = e_3 = (0, 0, 1)$

$\mathcal{U} = x' = 0 \Rightarrow x' = 0$

نعوض x' , y' في *

نجد $-2(0) + (0) = 0$

$V^{\perp} = \{ (0, 0) \}$

هل يمكن القول عن φ انه متناظر ؟

لا يمكن القول عن φ انه متناظر لانه لا

لانه ليس من الشكل

$$\varphi: V\times W \to F \; ; \; V \neq W$$

انتهى

الفصل الخامس:

فضاءات الحقيقية ذات الجداء الداخلي

* تعريف:

ليكن V فضاءً حقيقياً وليكن $\varphi: V\times V \to \mathbb{R}$ شكلاً خطياً ثنائياً متناظراً و $q: V \to \mathbb{R} \geqslant 0$ الشكل التربيعي المرفق لـ φ ولنفرض q غير سالب.

نقول عن q انه معرف موجب اذا تحقق

$$\forall v \in V \; ; \; q(v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

اي ان الشعاع الصفري هو الوحيد الذي صورته صفر

مثال (١):

هل q غير سالب ؟ $\quad q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$q(v) = q(x,y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2$$

$$= 2(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= 2(x-y)^2 \geqslant 0$$

$\Leftarrow$ q غير سالب

هل q معرف موجب؟

$$q(v) = 0 \Rightarrow 2(x-y)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (x-y)^2 = 0$$
$$\Rightarrow x - y = 0$$
$$\Rightarrow x = y$$

ان أي شعاع يحقق $x = y$ فإن صورته تساوي الصفر وهذا لا يكون غير صفري شرطاً

هو شعاع ليس صفري مثلاً $q(1,1) = 0$ صورته تساوي الصفر $\Rightarrow$ q ليس معرف موجب

مثال: $q(v) = 2x^2 - 2xy + y^2$

هل q غير سالب؟

$$q(v) = x^2 + x^2 - 2xy + y^2$$
$$= x^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ q غير سالب

هل q معرف موجب؟

$$q(v) = 0 \Rightarrow x^2 + (x-y)^2 = 0$$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

و $x - y = 0 \Rightarrow x = y = 0$

$v_0 = (x, y) = 0$

نعم إن q معرف موجب

تذكير

$a \geq 0$, $b \geq 0$

$a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$

Scanned by CamScanner

تعريف:

ليكن $F=\mathbb{R}$ و $\varphi: V\times V \to F$ شكلاً خطياً حيث V فضاء حقيقي، نقول عن φ أنه جداء داخلي إذا تحقق:

1- φ متناظر

2- φ معرف موجب

نعرض الجداء بالرمز $\langle .,. \rangle$ أي $\langle u,v \rangle = \varphi(u,v)$

$$\langle .,. \rangle : V\times V \to F=\mathbb{R}$$

تعريف:

نسمي الفضاء الحقيقي V المزود بجداء داخلي $\langle .,. \rangle$ بفضاء الجداء الداخلي أو فضاء إقليدي أو فضاء حقيقي ونرمز له $(V, \langle .,. \rangle)$

تعريف:

ليكن V فضاءً إقليدياً (أي ذو جداء داخلي) $(V, \langle .,. \rangle)$

نعرف نظيم شعاع $v\in V$ على أنه العدد الحقيقي

حيث $\|v\| = \sqrt{\varphi(v)} = \sqrt{\langle v,v \rangle}$

ومنه $\|v\|^2 = \langle v,v \rangle = \varphi(v)$

Scanned by CamScanner

تعريف:

ليكن V مع دالة الجداء الداخلي فضاءً إقليدياً ،
نعرّف المسافة بين شعاعين v و w والتي نرمز لها
بالرمز $d(v,w)$ على أنه العدد الحقيقي غير السالب

$$d(v,w) = \|v-w\| = \sqrt{\langle v-w, v-w \rangle}$$

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(v,w) \longmapsto d(v,w) = \|v-w\|$$

وهي دالة متناظرة .

« المسافة المباشرة »

ناريمان جلو

سمية يامنة