خلاصة الأحتمالات

مقدمة

$$X : (\Omega, A, P) \longrightarrow (\Omega', A')$$

$$\forall A' \in A' : X^{-1}(A') \in A$$

X متقطع قابلة للعد الذي كثير تعرف بدالة احتمال $F_X(x)$

X مستمر غير منتهية وغير قابلة للعد تعرف بدالة الكثافة $f_X(x)$

ضمان التوزيع إذا أن تكون الدالة متقطعة أو مستمرة ضامن التكامل

* الكثافة هي دالة لها قيم على كل مجموعة الأعداد الحقيقية

- الدالة المولدة للعزوم وعزوم المتغير العشوائي

* ليكن X متغير عشوائي (إما مستمر أو متقطع) نسمي المقدار $m_r = E(X^r)$; $r \geq 1$ العزم الابتدائي من الدرجة r للمتغير العشوائي X

حالة خاصة: عندما $r=1$ نحصل على التوقع $\mu_x = m_1 = E(X)$

ملاحظة: $\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = m_2 - m_1^2$

الدالة المولدة للعزوم

ليكن X متغير عشوائي وليكن t عدد حقيقي، نسمي $\mu_x(t) = E(e^{tx})$ الدالة المولدة للعزوم لـ X

ملاحظة: لكل متغير عشوائي دالة مولدة للعزوم خاصة به وتميزه

* تلزمنا عندما نريد دالة التوزيع لمتغير عشوائي ولا نستفاد من دالة الكثافة

مبرهنة: ليكن X متغير عشوائي ولتكن $\mu_X(t)$ الدالة المولدة للعزوم لـ X فإن كان $\mu_X(t)$ قابلة للاشتقاق من الدرجة n بالنسبة لـ x فإننا نستطيع حساب جميع العزوم حتى الدرجة n

$$m_r = \left.\frac{d^r \mu_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \mu_X^{(r)}(0)$$

العزم الابتدائي من الدرجة r $\quad \forall r = 1, \dots, n$

الإثبات: لنفرض أن X مستمر كثافته الاحتمالية $f(X)$ وبالتالي $E(g(x))$ هو توقع دالة لـ X

$$\mu_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

ولدينا $\mu_X^{(r)}(t) = \dfrac{d\mu_X(t)}{dt}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{de^{tx}}{dt} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f(x)\,dx \Rightarrow M_X^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{de^{tx}}{dt} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{tx} f(x)\,dx = \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} \quad \text{———} \quad M_X^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{tx} f(x)\,dx$$

$$M_X^{(r)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^r e^{0x} f(x)\,dx \quad \forall r = 1, \ldots, n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx = E(X^r) = m_r \quad \forall r = 1, \ldots, n \quad \begin{cases} g(x) = X^r \\ g(x) = X \end{cases}$$

ملاحظة: في حال الانقطاع دالة احتمال لـ X ← $f(x)$ معرفة فيه R_X فإن:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in R_X} e^{tX} f(X)$$

مثال: ليكن X متغير عشوائي متقطع جدول توزيعه الاحتمالي

X	-2	4	Σ
$f(X)$	$0,6$	$0,4$	1

احسب الدالة المولدة للعزوم لـ X ثم بين أن:

$$E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$$

الحل: الدالة المولدة للعزوم

$$M_X(t) = E(e^{tx}) =$$

$$\sum_{x \in R_X} e^{tx} f(X) = e^{-2t} f(-2) + e^{4t} f(4) = e^{-2t}(0,6) + e^{4t}(0,4)$$

هي ليست شهيرة بالنسبة للتوزيعات التي سندرسها

2) حساب $m_1 = E(X)$ و $m_2 = E(X^2)$ بالحساب المباشر

$$m_1 = E(X) = (-2)(0,6) + (4)(0,4) = -0,12 + 0,16 = 0,4$$

$$m_2 = E(X^2) = (-2)^2(0,6) + (4)^2(0,4) = 4 \times 0,6 + 16 \times 0,4 = 8,8$$

والآن حساب m_1 و m_2 باستخدام الدالة المولدة للعزوم

$$M_X^{(1)}(t) = (-2)(0,6)e^{-2t} + (4)(0,4)e^{4t}$$

$$= -1,2\, e^{-2t} + 1,6\, e^{4t}$$

$$M_X^{(1)}(0) = 1,2 + 1,6 = 0,4 = m_1$$

$$M_X^{(2)}(X) = 8,8 = m_2$$

مبرهنة: ليكن X متغير عشوائي دالته المولدة للعزوم $M_X(t)$ وليكن
$Y = aX + b$ حيث a, b ثوابت حقيقية عندئذ

$$M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)$$

الإثبات:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{atX+bt}) =$$
$$E(e^{atX} \cdot e^{bt}) = e^{bt} E(e^{atX})$$
$$\Rightarrow M_Y(t) = e^{bt} E(e^{sX}) = e^{bt} M_X(S) = e^{bt} M_X(at)$$

مبرهنة: إذا كان X و Y متغيران عشوائيان مستقلان دالتهما المولدتان للعزوم
$M_X(t)$, $M_Y(t)$ وليكن $Z = X+Y \Rightarrow$ $\quad M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y$

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

الإثبات:

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} \cdot e^{tY})$$
$$= E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$ لكن X و Y مستقلان

والدوال الأسية هي قياسية
أي دالة قياسية لـ X
هي مستقلة عن دالة
قياسية لـ Y

في الحالة العامة
ليكن $X_1, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية
مستقلة وليكن $M_X(t)$ دالة مولدة للعزوم
لـ X_i عندئذ

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

انتهت المحاضرة الأولى

المحاضرة الثانية.

1) التوزيع البرنولي: نقول عن المتغير عشوائي X أنه يتبع توزيع برنولي بالمعلم P ($X \sim Ber(P)$) إذا كان

$f(1) = P(X=1) = P$

$f(0) = P(X=0) = 1-P = q$

يمكن دمج هذه القيم في جدول توزيع من الشكل:

X	0	1	Σ:
$f(X)$	$1-P$	P	1

حيث P احتمال النجاح

نتيجة: لدينا $\mu = E(X) = P$ ، $\sigma_x^2 = V(X) = P(1-P) = Pq$

لأن: $\mu = E(X) = (0)(1-P) + (1)(P) = P$

$E(X^2) = (0^2)(1-P) + (1^2)(P) = P$

$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = P - P^2 = P(1-P) = Pq \; ; \; q = 1-P$

نتيجة (2): الدالة المولدة للعزوم لتوزيع برنولي:

$M_x(t) = 1-P+Pe^t = q+Pe^t$

لأن: $M_x(t) = E(e^{tX}) = e^{t(0)}(1-P) + e^{t(1)}(P)$

$1-P+Pe^t = q+Pe^t$ ($X \sim Bin(n,P)$) Binomial

2) التوزيع الحداني: نقول متغير عشوائي X أنه يتبع التوزيع الحداني (الثنائي) بالوسيطين (n,P) إذا كان:

$f(x) = C(n,x)\,P^x (1-P)^{n-x}$

$= C(n,x)\,P^x q^{n-x} \; , \; x = 0,1,2,\dots$

ملاحظة: حيث X في التوزيع الحداني عدد مرات النجاح عند تكرار تجربة برنولي (باحتمال نجاح P) n تكرار مستقلة تحت الشروط ذاتها.

• $\mu = E(X) = nP$ • $\sigma_x^2 = V(X) = nPq$ •

جدول التوزيع لـ X الحداني:

X	0	1	2	$\dots$ n	
$f(x)$	$C(n,0)P^0q^n$ q^n	$C(n,1)P^1q^{n-1}$	$C(n,2)P^2q^{n-2}$	$C(n,n)P^nq^0$	$\Sigma = 1$

$$\sum_{x=0}^{n} C(n,x)\,P^x q^{n-x} = (P+q)^n = 1^n$$

AL MARJI

لنثبت الآن أن $\mu = E(X) = np$

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\, f(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, C(n,x)\, p^{x} q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^{x} q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!}$$

$$= \sum_{y=0}^{n-1} \frac{n!}{y!\,(n-y-1)!} p^{y+1} q^{n-y-1}$$

لنأخذ $y = x-1 \Leftarrow x = y+1$

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} \underbrace{\boxed{\frac{(n-1)!}{y!\,(n-y-1)!} p^{y} q^{n-y-1}}}_{=1}$$

نلاحظ الآن $(p+q)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$

$$1 = (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} C(n-1,x)\, p^{x} q^{n-1-x} = \sum_{x=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{x!\,(n-1-x)!} p^{x} q^{n-1-x}$$

انتهينا الحمد لله ، بالتوفيق