المحاضرة الثالثة : * د. ت. م

التجزئة

- التجزئة الأدق - نظيم التجزئة - تعريف د. ت. م على $[a,b]$ - مثال

• نتائج : لتكن f معرفة على $[a,b]$ عندئذ :

① $\boxed{P \subseteq P'} \Rightarrow \Delta P \geq \Delta P'$

② $[a',b'] \subseteq [a,b] \Rightarrow V_{a'}^{b'} f \leq V_a^b f$

((التغير الكلي (sup المجموع))

③ $P \subseteq P' ; [a,b] \Rightarrow V(f,P) \leq V(f,P')$

مجموع بدون sup - تجزئة لتغير الكلي

④ $V(f,P) \leq V_a^b f \quad , \forall P \in \mathcal{P}[a,b]$ (من تعريف sup)

⑤ من تعريف الـ sup نجد : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P' \in \mathcal{P}[a,b]$:

$$V(f,P') > V_a^b f - \varepsilon$$

⑥ اذا كانت f دالة ثابتة فإن $V_a^b f = 0$ (كافة المجاميع بالطبع أصفار)

• تعميم تعريف f د. ت. م على : $]-\infty,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $[a,+\infty[$

• f د. ت. م على $[a,+\infty[$ اذا كانت ذات تغير محدود على أي مجال جزئي منه وكان :

$$V_a^{\infty} f := \sup_{A>a} \{V_a^A f\} := \lim_{A\to+\infty} V_a^A f < \infty$$

f د. ت. م ⇐ ① محدودة

② $|f|$ د. ت. م

g د. ت. م ③ αf , $\frac{1}{f}$ د. ت. م . $|f(x)| \geq c > 0$

④ $f+g$, $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ د. ت. م $\forall x \in [a,b]$

⑤ $a<c<b$ ⇐ $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$

وكذلك بالنسبة لـ $]-\infty, b]$, $]-\infty, +\infty[$

$$V_{-\infty}^{b} f = \lim_{B \to -\infty} V_B^b f < \infty$$

$$V_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} V_A^B f < \infty$$

*مراجعة لتعريف الـ sup:

إذا كان $b = \sup(A)$ ⇐ ① $\forall x \in A: \; x \leq b$

② $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \xi \in A: \; \xi > b - \varepsilon$

• خواص د. ت. م:

① f د. ت. م على $[a,b]$ فإنه f محدودة على $[a,b]$ والعكس ليس بالضرورة

② f د. ت. م على $[a,b]$ فإنه $|f|$ د. ت. م على $[a,b]$ والعكس " "

③ f د. ت. م على $[a,b]$ فإنه:

αf د. ت. م على $[a,b]$. $\frac{1}{f}$ د. ت. م على $[a,b]$

حيث $|f(x)| \geq c > 0, \; \forall x \in [a,b]$

④ f, g د. ت. م على $[a,b]$ فإنه:

$f+g$ د. ت. م على $[a,b]$, $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ حيث:

$|g(x)| \geq c > 0 \; : \; \forall x \in [a,b].$

مهمة

⑤ f د. ت. م على $[a,b]$ وكانت $a < c < b$ فإنه f د. ت. م على $[a,c]$ و $[c,b]$ وبالعكس ويتحقق العلاقة: $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$

((يمكن تعميم هذه الخاصية)).

أمثلة: مثال (1): أوجد التغير الكلي f على $[0,1]$ علماً أنه:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x + 3 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

الحل

مثال (2): f معرفة على $[0,1]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

والمطلوب: ① بين أنه $|f|$ د. ت. م على $[0,1]$

② f ليست د. ت. م $[0,1]$

/ /

الأول

مثال (3): f معرفة على $[0,1]$ حيث:

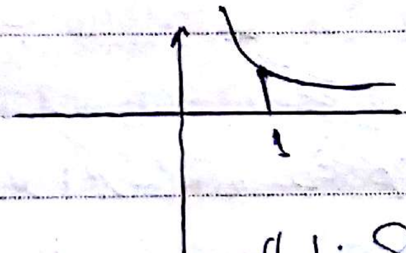
$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

والمطلوب: ① f مستمرة على $[0,1]$.

② f محدودة على $[0,1]$ ، ③ f ليست د.ت.م على $[0,1]$.

ملاحظات خارجية: • التغير: لتوضيح مثال: $]1,+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{x}$

• التغير الكلي هو الجزء الذي يأخذه على y



((الرياضيات ناصر البدارة)) $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{1}\right|$

• ملاحظة للامتحان: نكتب الفرض ← نكتب التعريف

نكتب الطلب ← نكتب التعريف ((الذي يخص تلك العلاقة هنا))

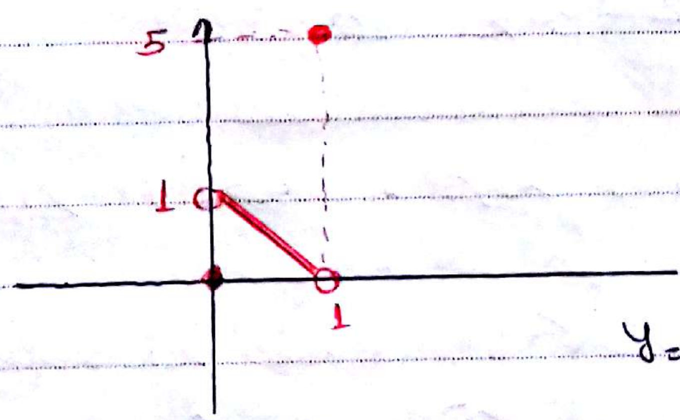
• المثال المعاكس للخاصة 1 هو المثال (3)

" " " 2 " " (2) بسبب هو الفرق بين مستقيمين.

المثال الأول هو تطبيق للخاصة 5.

ملاحظة الحاجة السابقة: أوجد التغير الكلي للدالة f على المجال $[0,1]$

مع الرسم f على $[0,1]$;
$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ 1-x & 0<x<1 \\ 5 & x=1 \end{cases}$$



الحل: لدينا المستقيم $y=1-x$

أطراف المجال بالمستقيم غير موجودة لذلك

نوجد النقاط حدودها: عندما $x=0$ ← $y=1$

عندما $y=0$ ← $x=1$

طريقة الرسم تعرفها الطريقة استنتاجية وغير مقبولة للامتحان:

أولاً كانت الدالة في الصفر ثم قفزت لـ 1 أي لدينا 1 ثم عادت للصفر ذهبت 1 أي 2 ثم قفزت لـ 5 فأصبحت 2+5 أي 7.

الحل: لنأخذ تجزئة للمجال $[0,1]$. $P=\{x_0=0<x_1<x_2<x_3<\dots<x_n=1\}$

$V_0^1 f=\sup V(f,P)$

حيث $P\in \mathcal{P}[a,b]$

$V(f,P)=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\dots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|$

$=|1-x_1-0|+|1-x_2-1+x_1|+|1-x_3-1+x_2|+\dots$

$+|5-1+x_{n-1}|$

$=(1-x_1)+x_2-x_1+x_3-x_2+\dots+x_{n-1}-x_{n-2}+4+x_{n-1}$

حذف الأصفار $=5-2x_1+2x_{n-1}=5-2(x_1-x_{n-1})$ موجب

$=5+2(x_{n-1}-x_1)$ ← موجب   سؤال دوم (X) $V_0^1 f=5+2=7$

الـ sup لهذه الكمية هو حتى يصبح المجال أوسع ما يمكن الفترة بينهما [لأنه x_{n-1} يسعى لـ 1 و x_1 يسعى للصفر] بالتالي.

$V_0^1 f=\sup\left(5+2(x_{n-1}-x_1)\right)=5+2(1)=7$

//ملاحظة: يمكن الحل بالاعتماد على التجزئة المنتظمة:

$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ سؤال (X)

$x_0=0$ $x_2=\frac{2}{n}$ ... $x_n=\frac{n}{n}=1$

$x_1=\frac{1}{n}$ $x_3=\frac{3}{n}$

نعوض في V ينتج مقدار بدلالة n

~~نعوض~~ في النتيجة نأخذ النهاية لما n تسعى لـ ∞ يصبح لدينا $\frac{n-1}{n}-\frac{1}{n}$

أي $\frac{n-2}{n}$ نضربه بـ 2 ونجمع 5 ونجعل n تسعى لـ ∞ يكون الناتج 7.

المحاضرة الرابعة: • تعريف د.ت.م • معايير د.ت.م

• خواص د.ت.م • تطبيقات د.ت.م

تمهيد (مراجعة): إذا كانت f دالة معرفة على المجال $[a,b]$ نقول أن f د.ت.م على $[a,b]$ إذا كان $V_a^b f<\infty$

حيث $V_a^b f=\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

• إذا كان المجال مفتوح يجب أن تكون f د.ت.م على كل مجال مغلق منه أي تكون f د.ت.م.

ملخص:
① f مطردة على $[a,b]$ ⟸ f د. ث. م $V_a^b f = |f(b)-f(a)|$
② f' محدود ⟸ f د. ث. م
③ f' محدود دكاملة ⟸ $\int_a^b |f'(x)|\,dx$ موجود ونهائي ⟸ f د. ث. م ومنه $V_a^b f = \int_a^b$
④ f مجموعة دالتين تزايديتين ⟸ f د. ث. م.

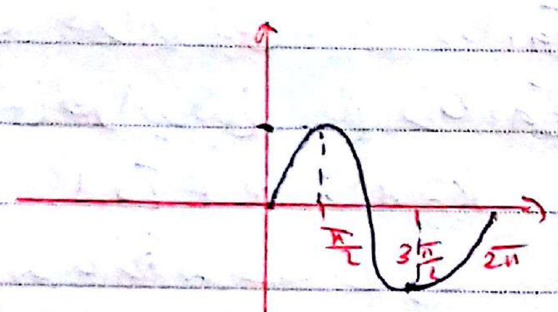
معايير الدوال د. ث. م :
تزايدية أو متناقصة

① - إذا كانت f دالة معرفة ومطردة على $[a,b]$ فإنها د. ث. م على $[a,b]$
// والنقطة الأنسب فيها $*$ // إذن: $V_a^b f = |f(b)-f(a)|$

م دخلها بالقيمة المطلقة لكي يكون الجواب موجب

- إذا كانت f مرة متناقصة ومرة متزايدة نقسم فاصيلها حسب الإبدال.

مثال: $y = \sin x \; : x \in [0, 2\pi]$



$$V_0^{2\pi} f = V_0^{\pi/2} f + V_{\pi/2}^{3\pi/2} f + V_{3\pi/2}^{2\pi} f$$

$$= |f(\tfrac{\pi}{2}) - f(0)| + |f(\tfrac{3\pi}{2}) - f(\tfrac{\pi}{2})|$$

$$+ |f(2\pi) - f(3\pi/2)| = |1-0| + |-1-1| + |0+1| = 4.$$

② - إذا كانت f معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز (من الدرجة الأولى) على $[a,b]$ فإنها د. ث. م على $[a,b]$

ما هو شرط ليبشتز : f دالة معرفة على $[a,b]$ نقول إنه تحقق f
شرط ليبشتز إذا وجد $L > 0$ حيث: $|f(u) - f(v)| < L\,|u-v|^{k}$
$\forall\, u, v \in [a,b]$ الدرجة

إذا كانت الدرجة صفر بالتالي فإنه شرط ليبشتز ⟸ محدودة.
// إذا الدرجة أكثر من 1 حسب $k > 1$ تكون الدالة ثابتة //

ملاحظة: عكس هذا المعيار ليس صحيح بالحالة العامة.

③ - إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ والمشتقة محدودة فإن f
دالة د. ث. م على $[a,b]$.

- إذا وجد $L > 0$ حيث: $|f'(x)| < L, \forall x \in [a,b]$
فإن f د. ث. م على $[a,b]$.

④ - // أقوى من المعيار الثالث // إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$
ربما باستثناء عدد منتهٍ من النقاط وكانت التكامل $\int_a^b |f'(x)|\,dx$ هام
موجوداً ومحدوداً فإنه f د. ث. م على $[a,b]$ ،

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

. هنا أهملنا بالتكاملات المعتلة . مثلاً: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ، $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$

و $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = -[e^{-x}]_0^\infty = 1$

// لكن هنا e^{-x} لا يصح لهيا للحساب لأن المجال هنا غير مغلقة //

⑤ - نتيجة: إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ فإنه يشرط اللازم والكافي

لكي تكون f دالة م.م على $[a,b]$ هو أنه تكتب في شكل فرق دالتين متزايدتين. $f = f_1 - f_2$ ، $\forall x \in [a,b]$ أي $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$

دالتين متزايدتين على $[a,b]$

مثال $f(x) = x - x^2$; $x \in [0,1]$ // هذا إذا انه م.م // ، هذا المعيار

صعب لما تكون هنا متعين

⑥ - إذا كانت f مستمرة على $[a,b]$ // إذا كانت مستمرة على مجال مغلقة طرفيها مستمرة

بانتظام على $[a,b]$ // فإنه التغير الكلي للدالة f يعطى بالعلاقة:

$V_a^b f = \lim \, V(f, P)$

إذا كانت التجزئة منتظمة فإن $\Delta P = \frac{b-a}{n}$ ، $\Delta P \to 0$

إذا كانت ΔP تسعى للصفر فإن n تسعى إلى ∞. نظيم

تمارين: ① - بين مع الرسم أن الدالة $f(x) = x - x^2$ دالة ذات تغير

محدود على المجال $[0,1]$ ثم أوجد التغير الكلي $V_0^5 f_2$?

② - بين أن الدالة: الحلول بالبيان ? $f(x) = x^2 - \frac{1}{x+1}$

د.ت.م على $[0,1]$ ثم أوجد $V_0^1 f$.

حلول ③ بين أن الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ د.ت.م على $[2,+\infty[$ ثم أوجد

التغير الكلي $V_2^{\infty} f$.

أنا حلها ④ f معرفة على $[0,1]$ كما يلي: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

والمطلوب:

/ /

1- بين أن f مستمرة على $[0,1]$

2- " " د. ث. م على $[0,1]$ مستخدماً تعريف الاستمرار.

5- اذا كانت f معرفة على $[0,\frac{1}{2}]$ كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{\ln x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- بين أن f مستمرة على $[0,\frac{1}{2}]$ ؟؟

2- " " متزايدة على $[0,\frac{1}{2}]$

3- " " د. ث. م على $[0,\frac{1}{2}]$

4- f لا تحقق شرط ليبشتز.

6- أثبت أن الدالة $f(x)=[x]$ (الجزء الصحيح لـ x) د. ث. م على $[-3,3]$ ثم أوجد التغير الكلي $V_{-3}^{3} f$

$|f(3)-f(-3)| = |3-(-3)| = 6.$

7- أثبت أن الدالة: $f(x)=x-[x]$ د. ث. م على $[-2,2]$ مع الرسم ثم أوجد التغير الكلي $V_{-2}^{2} f = ?$

• حل تمرين 7 دفترة: $[x]$ دالة الجزء الصحيح لـ x تعطي أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x . $g(x)=[x]$ ، $[x]=n \iff n \leq x < n+1$ ، n

أي $[x]=0 \iff 0\leq x<1$. الآن نعيد تعريف الدالة على $[-2,2]$

فايتي:

$$[x]=\begin{cases} -2 & -2\leq x<-1 \\ -1 & -1\leq x<0 \\ 0 & 0\leq x<1 \\ 1 & 1\leq x<2 \\ 2 & x=2 \end{cases}$$

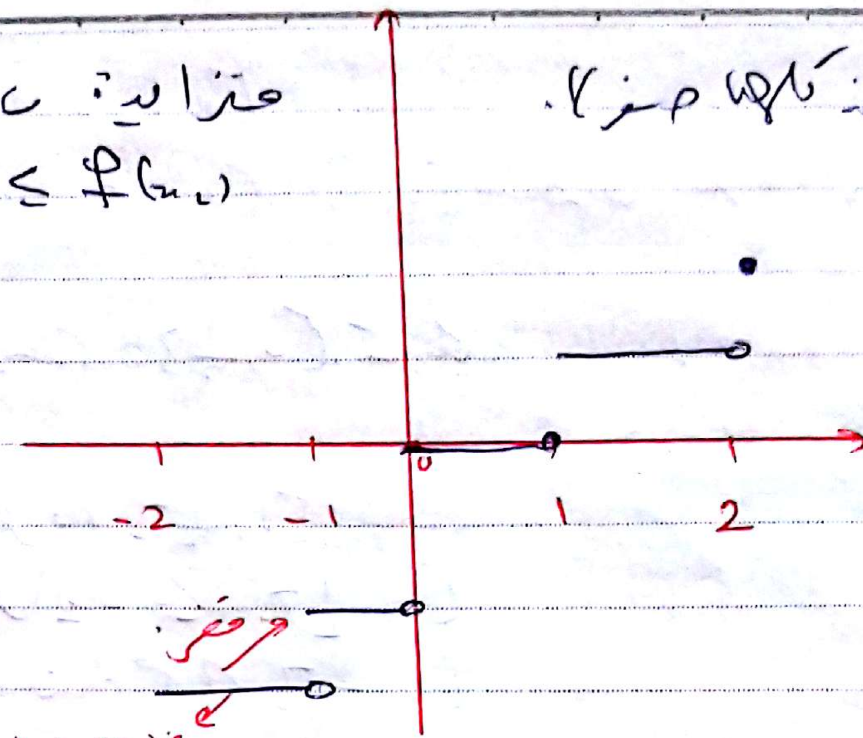
لأنه دخل المجال

/ /

١) بين ٠ ، ١ يأخذ كلها صفر.

متزايد: بشكل دائم لأنه

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$



٧. حل تمرين 7.

$$x - [x] = \begin{cases} x+2 & -2 \le x < -1 \\ x+1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ x-2 & x = 2 \end{cases}$$

الصعب نظرة

((فرق دالتين متزايدتين))

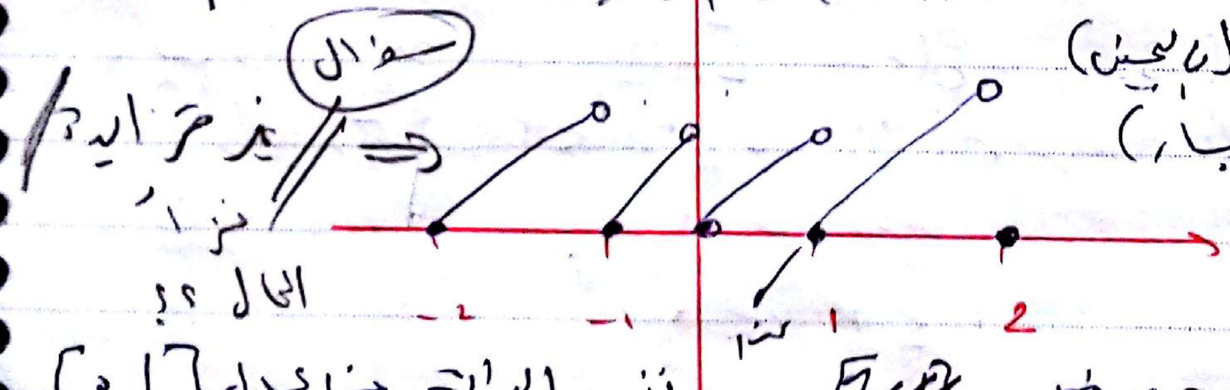
الرسم:

x منصف الربع الأول

$(x-1)$ موازي لمنصف الربع الأول (لليمين)

$(x+1)$ ــ ــ ــ (لليسار)

التغير الكلي هنا 8.



ملاحظة: لا أستطيع القول هنا أنه الدالة متزايدة $[0,1]$ متزايد هي غير متزايدة لأنه أبداً فلا أستطيع الاكتفاء بانطباقات كل حسب التعريف.

/ /

الخاصية الخامسة: * خواص د. ت. م

[1] إذا كانت f د. ت. م على $[a,b]$ فإنها محدودة ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة.

البرهان: f د. ت. م على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $V_a^b f < \infty$ لكل تجزئة P من $[a,b]$

f محدودة على $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\exists L > 0 ; |f(x)| \le L ; \forall x \in [a,b]$

• لتكن تجزئة ما بما أن f د. ت. م على $[a,b]$ بالشكل التالي

$P = \{a, x, b\} ; a < x < b$.

نأخذ التغير $V(f,P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le V_a^b f$

$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \le |f(x) - f(a)| + |f(a)|$

$\le V_a^b f + |f(a)| = L$

عدد لأن f معرفة أصغر من ∞ $\Leftarrow$ $\exists L > 0 , |f(x)| \le L , \forall x \in [a,b]$

• العكس غير صحيح بالضرورة المثال: عند a

إذا كانت f معرفة على $[0,1]$ كما يلي: $f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{\pi}{2x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

① - أثبت أنه f د. مستمرة على $[0,1]$ ✗ سؤال د؛

② " " f محدودة " $[0,1]$

③ " " f ليست د. ت. م على $[0,1]$

للطلب الأول: يجب أن نثبت أنه f مستمرة على $[0,1]$ نأخذ نقطة داخلية تنتمي للمجال $[0,1]$ ثم نختار الصفر ثم نختار 1 و نثبت أنها مستمرة عند النقاط الثلاثة.

② + ③

Let $\exists L > 0 , |f(x)| \le L , \forall x \in [0,1]$

1) $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 < L ; L > 0$.

2) $\left| x \cdot \cos\frac{\pi}{2x} \right| \le 1 \quad x \neq 0 \quad , \forall x \in]0,1]$

لأنه لو أخذت $x = 1$ يبقى 1 وإذا أخذت أصغر يصبح العدد أصغر $\Leftarrow$

$\Rightarrow |f(x)| \le 1 , \forall x \in [0,1] \Rightarrow$ f محدودة على $[0,1]$

✗ الجوهر: لنأخذ التجزئة: $P = \{0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1\}$

هذه التجزئة تضمن أنه الدالة f ليست د. ت. م.

$$V(f,P) = |f(\tfrac{1}{2n}) - f(0)| + |f(\tfrac{1}{2n-1}) - f(\tfrac{1}{2n-2})| + \cdots + |f(\tfrac{1}{2}) - f(\tfrac{1}{3})| + |f(1) - f(\tfrac{1}{2})| =$$

$$|\tfrac{1}{2n}\cos n\pi - 0| + |0 - \tfrac{1}{2n}\cos n\pi| + \cdots + |-\tfrac{1}{2} - 0| + |0 - (-\tfrac{1}{2})|$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + 1$$

$$\Rightarrow V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Rightarrow \overset{1}{\underset{0}{V}} f = \sup_P V(f,P)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

$\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ متسلسلة متباعدة إذاً f ليست دالة تغير محدود على $[0,1]$

التوضيح // $\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2} = 0 = f(\frac{1}{2n-1})$ عدد فردي

$$\frac{1}{2n}\cos\frac{\pi}{\ } = \frac{1}{2n}\cos n\pi$$

وعادة الذي بعده زوجي فيصبحن ال $\frac{1}{2n}$ $2 \cdot \frac{1}{2n}$

وإن $\frac{1}{2}\cos\pi = -\frac{1}{2}$ //

//لماذا أضفنا الصفر؟ لكي نجد ال sup يجب أن نأخذ بعين الاعتبار كل الحدود.

أي أريد أن تصل الدالة إلى أكبر قيمة //

[2] إذا كانت f د.ت.م على $[a,b]$ فإن $|f|$ د.ت.م $[a,b]$

ولكن العكس ليس بالضرورة.

الإثبات: $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$ لنثبت أن $\overset{b}{\underset{a}{V}} |f| < \infty$ خذ تجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$، لتكن P تجزئة لـ $[a,b]$ حيث

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b\}$$

$$V(|f|,P) = \sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

متباينة المثلثية : $\big||u|-|v|\big| \le |u-v|$

$\Rightarrow V(|f|,P) \le V(f,P)$

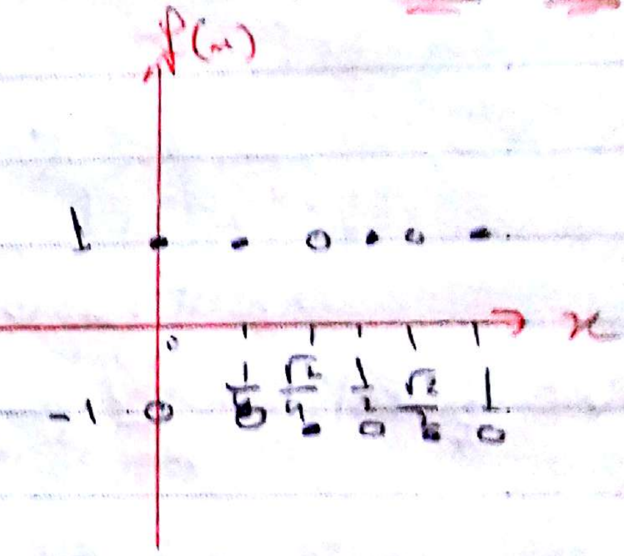
نأخذ الـ sup للطرفين ⇐ $\bigvee_a^b |f| \le \bigvee_a^b f < \infty$

لأن f م.ث.م

منه $|f|$ م.ث.م على $[a,b]$.

العكس مثال: اذا كانت f دالة معرفة على $[0,1]$ كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$



التغير هنا يسعى إلى ∞.

لدينا: $\varphi=|f|=1,\ \forall x\in[0,1]$

دالة ثابتة ⇐ $\bigvee_0^1 |f| = 0 < \infty$

التغير الكلي لدالة ثابتة معدوم.

. منه $|f|$ م.ث.م على $[0,1]$.

. لكن / تجزئة نوصل إلى ∞ التالية:

$$P=\{x_0=0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=1\}$$

شرط: $x_0\in\mathbb{Q},\ x_1\notin\mathbb{Q},\ x_2\in\mathbb{Q},\ \dots,\ x_{n-1}\notin\mathbb{Q},\ x_n\in\mathbb{Q}$

$$V(f,P)=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\dots+|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|+|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$=|-1-1|+|1-(-1)|+\dots+|-1-1|+|1-(-1)|$$

$$=\underbrace{2+2+\dots+2}_{n\ \text{مرة}}=2n$$

$\bigvee_0^1 f=\sup_P V(f,P)=\lim_{n\to\infty} 2n=+\infty \Rightarrow$ f ليست م.ث.م على $[0,1]$

3- اذا كانت f م.ث.م على $[a,b]$ فإن λf م.ث.م على $[a,b]$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$

الإثبات: نأخذ تجزئة ما P لـ $[a,b]$ حيث $P\in\mathcal{P}[a,b]$

$V(\alpha f, P) = \sum_{k=1}^{n} |(\alpha f)(x_k) - (\alpha f)(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1})|$

$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha| . |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |\alpha| . \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |\alpha| . V(f, P)$

$V(\alpha f, P) \le |\alpha| . V_a^b f < \infty \Rightarrow V_a^b \alpha f < \infty$

sup ع.ن

$\therefore f$ د.ت.م ع $[a,b]$.

(4) - اذا كانت f د.ت.م ع $[a,b]$ فإن $\frac{1}{f}$ د.ت.م ع $[a,b]$ بشرط:

$|f(x)| \ge c > 0 \quad , \quad \forall x \in [a,b]$

الإثبات: لتكن P تجزئة لـ $[a,b]$, $P \in \mathbb{P}[a,b]$

$V(\frac{1}{f}, P) = \sum_{k=1}^{n} |\frac{1}{f}(x_k) - \frac{1}{f}(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}|$

بتوحيد المقامات:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|f(x_k)| . |f(x_{k-1})|}$

وبما أن $|f(x)| \ge c \Leftarrow |\frac{1}{f(x)}| \le \frac{1}{c}$

$V(\frac{1}{f}, P) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{c^2} \le \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$

$V(\frac{1}{f}, P) \le \frac{1}{c^2} V(f, P)$

نأخذ الـ sup للطرفين $\Leftarrow$ $V_a^b \frac{1}{f} \le \frac{1}{c^2} V_a^b f < \infty$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{f}$ د.ت.م ع $[a,b]$

أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x : $f(x) = [x] = \lfloor x \rfloor$

علاقة مميزة للدالة. $n \le x < n+1 \Rightarrow f(x) = n$

أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي x : $f(x) = \lceil x \rceil$

العلاقة المميزة: $f(x) = n+1 \Leftarrow n < x \le n+1$