◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة الرابعة عشر

◄ عنوان المحاضرة: الطاقة الحركية في الإحداثية المعممة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- حل بعض التمارين والأمثلة على ما سبق .
2- الطاقة الحركية في الإحداثيات المعممة .

" الطاقة الحركية في الإحداثيات المعممة "

نعلم أن : $r = r(q_1, q_2, q_3, t)$ و $T = \frac{1}{2}mv^2$

وكان لدينا : $v = \frac{\partial r}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial r}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial r}{\partial q_3} q_3' + \frac{\partial r}{\partial t}$

نعوض في علاقة الطاقة الحركية ونربع فنجد :

$$T = \frac{1}{2}m\left[\begin{gathered}\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2 {q_1'}^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2 {q_2'}^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)^2 {q_3'}^2 + 2\frac{\partial r}{\partial q_1}\frac{\partial r}{\partial q_2} q_1' q_2' \\ +2\frac{\partial r}{\partial q_2}\frac{\partial r}{\partial q_3} q_2' q_3' + 2\frac{\partial r}{\partial q_3}\frac{\partial r}{\partial q_1} q_3' q_1' + 2\frac{\partial r}{\partial q_1}\frac{\partial r}{\partial t} q_1' \\ +2\frac{\partial r}{\partial q_2}\frac{\partial r}{\partial t} q_2' + 2\frac{\partial r}{\partial q_3}\frac{\partial r}{\partial t} q_3' + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\end{gathered}\right]$$

وإذا أخذنا الرموز:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}m\frac{\partial r}{\partial q_i}\frac{\partial r}{\partial q_j} \quad , \quad b_i = \frac{1}{2}m\frac{\partial r}{\partial q_i}\frac{\partial r}{\partial t} \quad , \quad c = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

فيمكن أن تكتب علاقة حساب T بشكلٍ مختصر:

$$T = a_{11}\, {q'_1}^2 + a_{22}\, {q'_2}^2 + a_{33}\, {q'_3}^2 + 2a_{12}\, q'_1\, q'_2 + 2a_{23}\, q'_2\, q'_3 + 2a_{31}\, q'_3\, q'_1 + 2b_1\, q'_1 + 2b_2\, q'_2 + 2b_3\, q'_3 + c$$

$$\boxed{T = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, q'_i q'_j + 2\sum_{i=1}^{3} b_i\, q'_i + c}$$

حيث أن قيم الأمثال (b_i, a_{ij}, c) معلومة ونلاحظ على أن الحد الأول بالعلاقة الأخيرة هو صيغة مربعة لتابع متجانس من الدرجة الثانية بالنسبة للسرع المعممة والحد الثاني خطي بالنسبة لهذه السرعة أما الحد الثالث فلا يتعلق بسرع

مثال (1) :

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لمستوي $x_1o_1y_1$ يدور حول محور شاقولي oz_1 بدوران منتظم سرعته ω .

أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وذلك بفرض أن النقطة تخضع لقوة مركزية جاذبة تتناسب مع بعد النقطة عن مركز الجذب .

الحل :

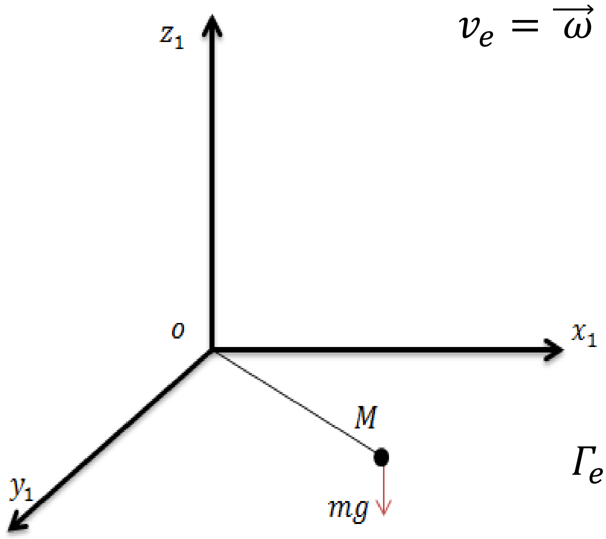
M نقطة مادية تخضع لقوتين : قوة الثقل $F_1 = mg$

وقوة مركزية جاذبة $F_2 = -m\,\lambda^2 r$

قوة الجذب مرت معنا $F = -m\,\omega^2 r$

حسب القانون الاساسي في التحريك النسبي ....

$$m\overrightarrow{\Gamma_r} = \vec{F} + \vec{J_e} + \vec{J_c} \ldots\ldots (*)$$



نعلم أن السرعة الجرّية هي $v_e = \omega\ \Lambda\, r \Longleftarrow v_e = \vec{\omega}\ \Lambda\ \overrightarrow{oM}$

ومنه التسارع الجرّي $\Gamma_e = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 .\, oM$

نلاحظ أن الدوران منتظم حول oz اي إن $\varepsilon = 0$ لأن $\frac{d\omega}{dt} = 0$

(الحركة فقط في المستوي $x_1o_1y_1$) $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$$\Gamma_e = -\omega^2 .\, \vec{r}$$

$$\Gamma_e = -\omega^2 (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \Longrightarrow \Gamma_e = -\omega^2 x\vec{\imath} - \omega^2 y\vec{\jmath}$$

$$J_e = -m\Gamma_e \Longrightarrow \boxed{J_e = m\omega^2 x\vec{\imath} + m\omega^2 y\vec{\jmath}}$$

$$\Gamma_c = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}) = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = 2(-\omega y'\vec{i} + \omega x'\vec{j})$$

ومنه التسارع المتمم .... $\Gamma_c = -2\omega y'\vec{i} + 2\omega x'\vec{j}$

$$J_c = -m\Gamma_c \Rightarrow \boxed{J_c = 2m\omega y'\vec{i} - 2m\omega x'\vec{j}}$$

$$F_2 = -m\,\lambda^2\vec{r} \Rightarrow F_2 = -m\,\lambda^2(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$\boxed{F_2 = -m\lambda^2 x\vec{i} - m\lambda^2 y\vec{j}}$$

نعوض ما سبق في $(*)$ فنجد :

$$m(x'', y'', z'') = -m\lambda^2 x\vec{i} - m\lambda^2 y\vec{j} + m\omega^2 x\vec{i} + m\omega^2 y\vec{j}$$
$$+2m\omega y'\vec{i} - 2m\omega x'\vec{j}$$

$$mx'' = -m\lambda^2 x + m\omega^2 x + 2m\omega y' \Rightarrow x'' = -\lambda^2 x + \omega^2 x + 2\omega y'$$
$$my'' = -m\lambda^2 y + m\omega^2 y - 2m\omega x' \Rightarrow y'' = -\lambda^2 y + \omega^2 y - 2\omega x'$$
$$mz'' = R - mg = 0$$

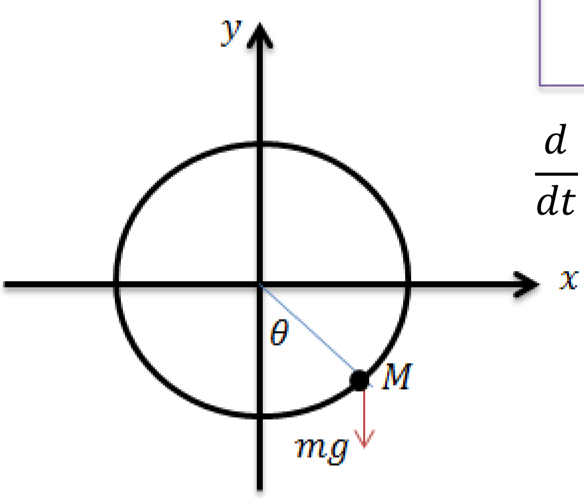
مثال (2) :

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك دائري ثابت في الفراغ نصف قطره a أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وذلك بتطبيق معادلات لاغرانج

الحل :

نقطة تتحرك على سلك فإن له محور احداثي فقط . (($q = \theta$) إحداثي معمم))

$$x = a.\cos\theta \quad , \quad y = a.\sin\theta$$



حسب معادلة لاغرانج $\boxed{\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial(T+u)}{\partial q_j} = 0}$

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial(T+u)}{\partial \theta} = 0$$

ونعلم أن قانون الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}mv^2$

$$v = x'\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow v^2 = x'^2 + y'^2$$
$$x' = -a.\sin\theta\,.\theta' \quad , \quad y' = a.\cos\theta\,.\theta'$$
$$v^2 = a^2.\sin^2\theta\,.\theta'^2 + a^2.\cos^2\theta\,.\theta'^2$$

$$v^2 = a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,.\,\theta'^2 \Longrightarrow \boxed{v^2 = a^2.\theta'^2}$$

نعلم أن قوة الثقالة هي قوة كمونية وبالتالي :

$$u = -\int mg\ dy = -mg\,y \Longrightarrow u = -mg.a.\sin\theta$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow T = \frac{1}{2}m[a^2.\theta'^2]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = ma^2.\theta' \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -mga.\cos\theta \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} = ma^2\theta''$$

نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$m\,a^2\theta'' + mag.\cos\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{a(a.\theta'' + g.\cos\theta) = 0}$$

مثال (3) :

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك دائري يدور حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω ، أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وذلك بتطبيق معادلات لاغرانج.

الحل :

نقطة تتحرك على سلك فإن له محور احداثي فقط . (($q = \theta$) إحداثي معمم)

$$x = a.\cos\theta \quad , \quad y = a.\sin\theta$$

حسب معادلة لاغرانج $\boxed{\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial (T+u)}{\partial q_j} = 0}$

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial (T+u)}{\partial \theta} = 0$$

ولدينا : $v_r^2 = x'^2 + y'^2 \Longleftarrow v_r = x'\vec{i} + y\vec{j}$; $T = \frac{1}{2}mv_a^2$

$$x' = -a.\sin\theta\,.\,\theta' \quad , \quad y' = a.\cos\theta\,.\,\theta'$$

$$v_r^2 = a^2.\sin^2\theta\,.\,\theta'^2 + a^2.\cos^2\theta\,.\,\theta'^2$$

$$v_r^2 = a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,.\,\theta'^2 \Longrightarrow v_r^2 = a^2.\theta'^2$$

$$u = -\int mg\ dy = -mg\ y \Longrightarrow u = -mg.a.\sin\theta$$

$$T = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad ; \quad v_a = v_r + v_e$$

$$v_e = (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \boxed{v_e = -\omega x\,\vec{k}}$$

$$v_a^2 = v_r^2 + v_e^2 \Longrightarrow v_a^2 = a^2.\theta'^2 + \omega^2 x^2$$

$$\boxed{v_a^2 = a^2.\theta'^2 + \omega^2 a^2.\cos^2\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}ma^2.\theta'^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2.\cos^2\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = ma^2.\theta' \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -m\omega^2 a^2.cos\,\theta\,.\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -mga.\cos\theta \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} = ma^2.\theta''$$

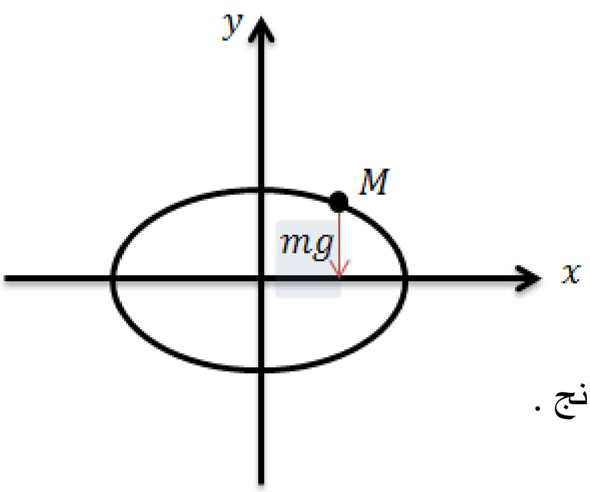
نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$ma^2.\theta'' + m\omega^2 a^2.cos\,\theta\,.\sin\theta + mga.\cos\theta = 0$$

$$\boxed{ma[a\,\theta'' + \omega^2 a\,cos\,\theta\,.\sin\theta + g.\cos\theta] = 0}$$

مثال (4) :

ليكن OX, OY محوران متعامدان OY شاقولي
صاعد M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك
لقطع ناقص تؤثر في نقطة مادية M قوة مركزية
متناسبة مع بعد نقطة عن مركز الجذب
أكتب معادلات الحركة للنقطة المادية
M إذا فرضنا أن المستوي يدور حول المحور OY الثابت
في الفراغ بدوران منتظم سرعته ω وذلك حسب معادلات لاغرانج .



الحل :

نعلم أن معادلات القطع الناقص هي : $y = b.\sin\theta \quad , \quad x = a.\cos\theta$

نعلم أن معادلة لاغرانج $\boxed{\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial(T+u)}{\partial q_j} = 0}$

القوة الجاذبة مركزية $F_1 = -m\,\lambda^2 r$ ، وقوة الثقل $P = mg$

ونعلم أن الطاقة الحركية هي $T = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_e^2)$ $\qquad T = \frac{1}{2}mv_a^2$

$y' = b\cos\theta\,.\theta' \quad , \quad x' = -a\sin\theta\,.\theta'$

ومنه السرعة النسبية $\boxed{v_r^2 = a^2.\sin^2\theta\,.\theta'^2 + b^2.\cos^2\theta\,.\theta'^2} \Longleftarrow v_r^2 = x'^2 + y'^2$

والسرعة الجرية

$$\vec{v_e} = \omega \wedge oM = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega x\vec{k}$$

$$\vec{v_e} = -\omega\, a\cos\theta\,.\vec{k} \Longrightarrow \boxed{v_e^2 = \omega^2.a^2.\cos^2\theta}$$

بتعويض في قانون الطاقة الحركية نجد :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m[(a^2.\sin^2\theta + b^2.\cos^2\theta).\theta'^2 + \omega^2.a^2.\cos^2\theta]}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = m(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta' \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial\theta'} = m(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta''$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = m(a^2\sin\theta\cos\theta - b^2\cos\theta\,.\sin\theta)\theta'^2 - \omega^2a^2\cos\theta\,.\sin\theta$$

القوة M تخضع لقوتين((u_1 هي قوة الثقل و u_2 قوة الجذب)) واخذنا الثقل سالب لانه عكس دوران oy

$$u_1 = -\int mg\ dy = -mgy \Longrightarrow u_1 = -mgb\sin\theta$$

$$u_2 = -\int m\lambda^2 r.dr \Longrightarrow u_2 = -m\lambda^2\frac{r^2}{2}$$

$$u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}oM^2 \Longrightarrow u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}(x^2 + y^2)$$

$$u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}(a^2.\cos^2\theta + b^2.\sin^2\theta)$$

$$u = u_1 + u_2 \Longrightarrow \boxed{u = -mgb\sin\theta - \frac{m\lambda^2}{2}(a^2.\cos^2\theta + b^2.\sin^2\theta)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = -mgb.\cos\theta + m\lambda^2 a^2.\cos\theta.\sin\theta - m\lambda^2 b^2\sin\theta\cos\theta$$

نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta'' = (a^2\sin\theta\cos\theta - b^2\cos\theta.\sin\theta)\theta'^2$$
$$-\omega^2 a^2\cos\theta.\sin\theta - gb.\cos\theta + \lambda^2 a^2.\cos\theta.\sin\theta - \lambda^2 b^2\sin\theta\cos\theta)$$

مثال (5) تم أخذه في المحاضرة السادسة عشر

ليكن OX, OY محوران متعامدان OY شاقولي صاعد M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك للمستوي oxy إذا فرضنا أن النقطة المادية خاضعة لتأثير قوة دافعة متناسبة مع بعدها عن (o) وأن المستوي يدور حول oy بدوران منتظم ω

أكتب المعادلات التفاضلية للحركة باستخدام معادلات لاغرانج .

الحل : نعلم ان قانون الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}mv_a^2$

$$v_a^2 = v_r^2 + v_e^2 \quad ; \quad q_1 = x \quad , \quad q_2 = y$$

$$v_r^2 = x'^2 + y'^2$$

$$\vec{v_e} = \omega\wedge oM = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega x\vec{k} \Longrightarrow v_e^2 = \omega^2.x^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + \omega^2.x^2)}$$

$$u_1 = -mg\int dy \Longrightarrow u_1 = -mgy$$

$$u_2 = \int m\lambda^2 r.dr \Longrightarrow u_2 = m\lambda^2\frac{r^2}{2} \Longrightarrow u_2 = \frac{m\lambda^2(x^2+y^2)}{2}$$

$$u = u_1 + u_2$$

$$\boxed{u = -mgy + \frac{m\lambda^2}{2}(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\omega^2 x \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x'} = mx'$$

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial x'} = mx'' \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = m\lambda^2 x$$

$$m.x'' = m\omega^2 x + m\lambda^2 x \Rightarrow \boxed{x'' = (\omega^2 + \lambda^2)x \dots\dots (1)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = my'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -mg + m\lambda^2 y \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial y'} = my''$$

$$\boxed{y'' = -g + \lambda^2 y \dots\dots (2)}$$

من المعادلة (1) و (2) نجد معادلات الحركة للنقطة المادية .

" انتهت المحاضرة "

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق 2017

إعداد : محمد علي فليون && رهف سليمان