مثال 4: الحبك في حل المعادلة

$$4z^2(1-z)\,w'' + 2z\,(1-z)\,w' + zw = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

$$w'' + \frac{2z(1-2z)}{4z^2(1-z)}w' + \frac{z}{4z^2(1-z)}w = 0$$

$$w'' + \frac{(1-2z)}{2z(1-z)}w' + \frac{1}{4z(1-z)}w = 0$$

$z = 0$ قطب بسيط لـ $a(z)$

$z = 0$ قطب بسيط لـ $b(z) \Leftarrow z = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نكتب المعادلة الدليلية:

$$a_1(z) = z\,a(z) = z\,.\,\frac{1-2z}{2(z)(1-z)} \Rightarrow a_1(0) = \frac{1}{2} = c_0$$

$$b_1(z) = z^2\,\frac{1}{4z(1-z)} = \frac{z}{4(1-z)} \Rightarrow b_1(0) = 0 = d_0$$

ومنه:

$$\lambda\,(\lambda - 1) + c_0\,\lambda + d_0 = 0$$

$$\lambda\,(\lambda - 1) + \frac{1}{2}\,\lambda + 0 = 0$$

$$2\lambda\,(\lambda - 1) + \lambda = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \notin Z$$ (الفرق بين الجذرين ليس عدداً صحيحاً)

نحن أمام الحالة الأولى.

نبحث عن حل من الشكل:

(متسلسلة صحيحة معممة $w = \sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda}$ وحيث $c_0 \neq 0$.

بالاشتقاق نجد:

$$w' = \sum_{0}^{\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$w'' = \sum_{0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المفروضة:

$$4z^2(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2} + 2z(1\text{-}2z) \sum_{0}^{\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1} + \sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda+1} = 0$$

نضرب ونختصر على z^λ:

$$\sum_{0}^{\infty} 4(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^k - \sum_{0}^{\infty} 4(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+1} + \sum_{0}^{\infty} 2(k+\lambda) c_k z^k - \sum_{0}^{\infty} 4(k+\lambda) c_k z^{k+1} + \sum c_k z^{k+1} = 0$$

نكتب المعادلة المميزة:

$$z^0 : \; 4\lambda(\lambda - 1) c_0 + 2\lambda c_0 = 0 \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

$$c_0 [4\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda] = 0$$

$$2\lambda(\lambda - 1) + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = \frac{1}{2} \; ; \; \lambda_1 - \lambda_2 \notin Z$$

نتابع عملية المطابقة:

$$z^k : 4(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k - 4(k+\lambda-1)(k+\lambda-2) c_{k-1} + 2(k+\lambda) c_k - 4(k+\lambda-1) c_{k-1} + c_{k-1} = 0$$

$\Rightarrow [4\,(k+\lambda)(k+\lambda-1)+2\,(k+\lambda)]\,c_k$

$\quad - [4\,(k+\lambda-1)\,(k+\lambda-2)+4\,(k+\lambda-1)-1)\,c_{k-1}=0$

$\Rightarrow [2\,(k+\lambda)(\,2k+2\lambda-2+1)]\,c_k=[4\,(k+\lambda-1)\,(k+\lambda-2+1)-1]\,c_{k-1}$

$\Rightarrow 2(\,k+\lambda)\,(2k+2\lambda-1)\,c_k=[4\,(k+\lambda-1)\,(k+\lambda-1)-1]\,c_{k-1}$

$\Rightarrow 2(k+\lambda)(2\lambda+2\lambda-1)c_k=[(2k+2\lambda-2+1)(2k+2\lambda-2-1)]\,c_{k-1}$

$\Rightarrow 2(k+\lambda)\,c_k=(2k+2\lambda-3)\,c_{k-1}\ ;\ k\geq 1$

من أجل الجذر الأول:

For $\lambda_1=0\Rightarrow 2kc_k=(2k-3)\,c_{k-1}$

$$\Rightarrow c_k=\frac{2k-3}{2k}c_{k-1}\quad ;\quad k\geq 1$$

$$k=1\Rightarrow c_1=-\frac{1}{2}\,c_0$$

$$k=2\Rightarrow c_2=\frac{1}{4}\,c_1$$

$$k=3\Rightarrow c_3=\frac{3}{6}\,c_2$$

$$k=4\Rightarrow c_4=\frac{5}{8}\,c_3$$

$$k=5\Rightarrow c_5=\frac{7}{10}\,c_4$$

$\vdots$

$$\forall\,k=k\Rightarrow c_k=\frac{2k-3}{2k}c_{k-1}\quad ;\quad k\geq 1$$

نضرب العلاقات طرفاً بطرف فنجد:

$$c_k=\frac{(-1)(1)(3)(5)(7)\ldots\ldots\ldots.(2k-3)}{(2)(4)(6)(8)\ldots\ldots\ldots.(2k)}c_0$$

$$c_k = \frac{(1)(3)(5)(7)......(2k-3)}{2^k(1.2.3.......k)} c_0$$

$$c_k = \frac{(2k-3)!}{2^k(k!)2^{k-1}(k-1)!} c_0$$

ومنه يكون الحل الأول من أجل الجذر الأول $\lambda_1 = 0$:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda_1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} - \frac{(2k-3)!}{2^{2k-1}(k!)(k-1)!} z^k \quad ; \quad c_0 = 1$$

$$\text{For } \lambda_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow (2k+1)\, c_k = (2k-2)\, c_{k-1}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{2k-2}{2k+1} c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

$$\begin{aligned} k = 1 \quad &\Rightarrow \quad c_1 = 0 \\ k = 2 \quad &\Rightarrow \quad c_2 = 0 \\ \vdots \quad &\quad\vdots \quad\quad \vdots \\ \forall k = k \Rightarrow &\quad c_k = 0 \end{aligned}$$

ومنه يكون الحل الثاني: $w_2 = \sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda_2} = c_0 z^{\frac{1}{2}} + 0 + 0 = \sqrt{z}$

ومن ثمّ الحل العام: $w = Aw_1 + Bw_2$ (تركيب خطي من الحلين w_1 و w_2).

مثال (٥):

ابحث في حل المعادلة:

$$zw'' + (1 + 4z^2)w' + 4z\,(1 + z^2)\, w = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية بـ z فنجد:

$$z^2w'' + z(1+4z^2)\,w' + 4z^2\,(1+z^2)\,w = 0$$

$$\Rightarrow w'' + \frac{z(1+4z^2)}{z^2}w' + \frac{4z^2(1+z^2)}{z^2}w$$

$$w'' + \frac{(1+4z^2)}{z} + 4(1+z^2)w = 0$$

$z = 0$ قطب بسيط لـ $a(z)$

$z = 0$ نقطة عادية بالنسبة لـ $b(z) \Leftarrow z = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نكتب المعادلة الدليلية:

$$\lambda\,(\lambda - 1) + \lambda\, c_0 + d_0 = 0$$

$$a_1(z) = z\,a(z) = 1 + 4z^2|_{z=0} = 1 \Rightarrow a_1(0) = c_0$$

$$b_1(z) = z^2b(z) = z^2(4+4z^2)|_{z=0} = 0 \Rightarrow b_1(0) = d_0 = 0$$

ومنه: جذر مضاعف

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

نبحث عن حل من الشكل:

$$w = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda}$$

بالاشتقاق والتعويض نجد:

$$z^2\sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda-2} + (z+4z^3)\sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$+(4z^2+4z^4)\sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} = 0$$

نفك الأقواس ونختصر على z^λ:

$$\sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^k + \sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^k + \sum_0^\infty 4(k+\lambda)c_k z^{k+2}$$

$$+\sum_0^\infty 4c_k z^{k+2} + \sum_0^\infty 4c_k z^{k+4} = 0$$

بالمطابقة:

$$z^0 : \lambda(\lambda - 1)c_0 + \lambda c_0 = 0$$

$$[\lambda(\lambda - 1) + \lambda]c_0 = 0 \;;\; c_0 \neq 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ جذر مضاعف}$$

$$z^1 : (\lambda + 1).(1 + \lambda - 1)c_1 + (1 + \lambda)c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$z^2 : (2 + \lambda)(1 + \lambda)c_2 + (2 + \lambda)c_2 + 4(\lambda)c_0 + 4c_0 = 0$$

$$[(2 + \lambda)(1 + \lambda + 1)]c_2 + [4\lambda + 4]c_0 = 0$$

$$c_2 = -c_0$$

$$z^3 : (3 + \lambda)(2 + \lambda)c_3 + 4(\lambda + 1)c_1 + 4c_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_3 = 0$$

$$z^k : (k + \lambda)(k + \lambda - 1)c_k + (k + \lambda)c_k + 4(k + \lambda - 2)c_{k-2} + 4c_{k-2} + 4c_{k-4} = 0$$

$$[(k + \lambda)(k + \lambda - 1) + (k + \lambda)]c_k + 4(k + \lambda - 2)c_{k-2} + 4c_{k-2} + 4c_{k-4} = 0 \qquad k \geq 4$$

$$[(k + \lambda)(k + \lambda - 1 + 1)]c_k + 4(k + \lambda - 1)c_{k-2} + 4c_{k-4} = 0$$

$$[k + \lambda]^2 c_k + 4(k + \lambda - 1)c_{k-2} + 4c_{k-4} = 0 \quad ; \quad k \geq 4$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow k^2 c_k + 4(k - 1)c_{k-2} + 4c_{k-4} = 0 \quad ; \quad k \geq 4$$

$$c_k = -4\frac{(k-1)c_{k-2} + c_{k-4}}{k^2} \quad ; \quad k \geq 4$$

$$k = 4 \Rightarrow c_4 = \frac{c_0}{2}$$

$$k = 5 \Rightarrow c_5 = 0$$

$$k = 6 \Rightarrow c_6 = -\frac{c_0}{6} = -\frac{1}{3!}c_0$$

$$k = 7 \Rightarrow c_7 = 0$$

نلاحظ أن جميع الثوابت ذات الأدلة الفردية معدومة. ومن ثمَّ فإن:

$$c_2 = -c_0$$

$$c_4 = \frac{1}{2!}\ c_0$$

$$c_6 = -\frac{c_0}{6} = -\frac{1}{3!}c_0$$

لنقترح صيغة الحل التالية:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!}c_0$$

ولنثبت أنها صحيحة بالاستقراء الرياضي:

نفرض صحتها من أجل $2k$ ولنبرهن صحتها من أجل $2(k + 1)$ أي $2k + 2$:

$$c_{2k+2} = c_{2(k+1)} = -4\frac{(2k+1)c_{2k} + c_{2k-2}}{(2k+2)^2}$$

$$= \frac{-4}{4(k+1)^2}\left[(2k+1)\frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right]c_0$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2}\left[\frac{(2k+1)}{k!} - \frac{1}{(k-1)!}\right]c_0$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2}\left[\frac{2k+1}{k(k-1)!} - \frac{1}{(k-1)!}\right]c_0$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2}\left[\frac{2k+1-k}{k(k-1)!}\right]c_0$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2}\left[\frac{k+1}{k(k-1)!}\right]c_0$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}c_0$$

ومنه يكون الحل:

$$w_1 = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda}$$

$$\Rightarrow w_1 = z^\lambda \sum_0^\infty c_k z^k$$

بما أن الثوابت ذات الأدلة الفردية معدومة يصبح الحل على الشكل:

$$w_1 = z^\lambda \sum_0^\infty c_{2k} z^{2k} = \sum_0^\infty c_{2k} z^{2k}$$

$$\Rightarrow w_1 = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} c_0 z^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} z^{2k+2} \quad ; \quad c_0 = 1$$

$$w_1 = e^{-z^2}$$

لنبحث الآن عن الحل الآخر:

نجري التحويل:

$$w_2 = w_1 \,.\, u \;;\; u = u\,(z)$$
$$w'_2 = w'_1 \,.\, u + u' \,.\, w_1$$
$$w''_2 = w''_1 \,.\, u + 2u' \,.\, w'_1 + u'' w_1$$

نعوض في المعادلة:

$$z^2 w'' + (z + 4z^3) w' + 4z^2 (1 + z) w = 0$$
$$z^2 (w''_1 u + 2u' \,.\, w'_1 + u'' w_1) + (z + 4z^3)(w'_1 u + u' w_1)$$
$$+ 4z^2 (1 + z)(w_1 \,.\, u) = 0$$
$$z \,.\, w_1 \,.\, u'' = - [2zw' + (1 + 4z^2) w_1] u'$$
$$\frac{u''}{u'} = -2\frac{w'_1}{w_1} - \frac{1+4z^2}{z} = -2\left(\frac{2ze^{-z^2}}{e^{-z^2}}\right) - \frac{1}{z} - 4z$$

$$\Rightarrow \frac{u''}{u'} = 4z - \frac{1}{z} - 4z$$

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{z} \Rightarrow \ln u' - \ln A = -\ln z = \ln z^{-1}$$

ومنه:

$$\Rightarrow \ln \frac{u'}{A} = \ln \frac{1}{z} \Rightarrow u' = \frac{A}{z} \Rightarrow u = A \ln z + B$$

ومن ثمّ:

$$\begin{aligned} w &= (A \ln z + B)e^{-z^2} \\ &= Ae^{-z^2} \ln z + Be^{-z^2} \end{aligned}$$

مثال (٦):

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$z^2 w'' - z(1 + z) w' + w = 0$$

في جوار النقطة $z = 0$.

الحل:

$$w'' - \frac{1+z}{z} w' + \frac{1}{z^2} w = 0$$

$z = 0$ قطب بسيط لـ $a(z)$

$z = 0$ قطب مضاعف لـ $b(z)$ ⇐ $z = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نكتب المعادلة الدليلية لها الشكل:

$$\lambda (\lambda - 1) + \lambda c_0 + d_0 = 0$$

حيث:

$$a_1(z) = z\, a(z) = - (1 + z) \Rightarrow a_1(0) = -1 = c_0$$

$$b_1(z) = z^2 b(z) \Rightarrow b_1(0) = d_0 = 1$$
$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = \lambda^2 - \lambda - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

جذر مضاعف $\lambda = 1$ (نحن أمام الحالة الثانية)

نبحث عن حل من الشكل $w = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda}$

بالاشتقاق والتعويض نجد:

$$z^2 \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2} - (z + z^2) \sum_0^\infty (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1}$$
$$+ \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} = 0$$

نفك الأقواس ونختصر على z^λ:

$$\sum_0^\infty (\lambda+k)(k+\lambda-1) c_k z^k - \sum_0^\infty (k+\lambda) c_k z^k - \sum_0^\infty (k+\lambda) c_k z^{k+1} + \sum_0^\infty c_k z^k = 0$$

بالمطابقة:

z^0: $\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (جذر مضاعف)

$$z^k: (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k - (k+\lambda) c_k - (k+\lambda-1) c_{k-1} + c_k = 0$$
$$\Rightarrow [(k+\lambda)(k+\lambda-1) - (k+\lambda) + 1] c_k = (k+\lambda-1) c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$
$$[(k+\lambda)(k+\lambda-1-1) + 1] c_k = (k+\lambda-1) c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$
$$\Rightarrow [(k+1)(k-1) + 1] c_k = k\, c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$
$$(k^2 - 1 + 1) c_k = k\, c_{k-1} \quad k \geq 1$$
$$c_k = \frac{1}{k} c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$
$$k = 1 \Rightarrow c_1 = c_0$$
$$k = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} c_1$$

$$k = 3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}\, c_2$$

$$\vdots$$

$$\forall\, k \Rightarrow\; c_k = \frac{1}{k} c_{k-1}$$

نضرب العلاقات بعضها ببعض فنجد:

$$c_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} \cdots \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} .1.c_0$$

$$c_k = \frac{1}{k!} c_0 \qquad ; \qquad c_0 = 1$$

ومنه يكون الحل الأول:

$$w_1 = \sum_0^{\infty} c_k z^{k+\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k+1} = ze^z$$

ولإيجاد الحل الثاني نجري التحويل:

$$w = u\,.\,w_1 \quad ; \quad u_1 = u(z)$$
$$w' = u'w_1 + uw'_1$$
$$w'' = u''w_1 + 2u'w'_1 + uw''_1$$

نعوض بالمعادلة المفروضة فنحصل على:

$$z^2(u''w_1 + 2u'w'_1 + uw''_1) - z(1 + z)\,(u'w_1 + uw'_1) + u.w_1 = 0$$
$$z^2u''w_1 + 2z^2u'w'_1 + z^2uw''_1 - zu'w_1 - zuw'_1 - zuw'_1 - z^2u'w_1 -$$
$$- z^2uw'_1 + uw_1 = 0$$
$$z^2u''w_1 + (2z^2w'_1 - (z+z^2)w_1)u' + (z^2w''_1 - z(1 + z)w'_1 + w)u = 0$$
$$z^2u''.w_1 = -\, 2z^2w'_1u' + zw_1u' + z^2w_1u'$$
$$\Rightarrow \frac{u''}{u'} = 1 + \frac{1}{z} - 2\frac{w'_1}{w_1}$$

بالمكاملة:

$$\ln u' = A + z + \ln z - 2\ln w_1 = A + z + \ln \frac{z}{w_1^2}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{a}{c_0} e^z \cdot \frac{z}{z^2 e^{2z}} = \frac{a}{c_0} z^{-1} e^{-z}$$

بالمكاملة نجد:

$$u = \frac{a}{c_0}\left(\ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k!)} z^k\right) + B$$

وبالتعويض في عبارة w نحصل على الحل العام المطلوب.

مثال (٧):

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية في جوار الواحد:

$$z^2 (1-z)^2 w'' + z(1-z)(1-2z) w' - w = 0$$

الحل:

نجري التحويل $z - 1 = t \Leftarrow z = t + 1$

لنحسب المشتقات لـ w بالنسبة لـ t

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot 1 = \frac{dw}{dt}$$

$$w'' = \frac{d2w}{dz^2} = \frac{dw'}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dz}\right)\frac{dt}{dz}$$

$$w'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dt}\right) \cdot (1) = \frac{d2w}{dt^2}$$

أي إن:

$$\Rightarrow w'_t = \frac{dw}{dt} \;,\; w''_t = \frac{d2w}{dt^2}$$

نعوض بالمعادلة الأصلية فنجد:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\lambda} \; ; \lambda \in C \; ; \; c_0 \neq 0$$

$$t^2(t^2 + 2t + 1)\, w'' + t(t+1)(2t+1)\frac{dw}{dt} - w = 0$$

$$\Rightarrow t^2(t^2 + 2t + 1) \sum_0^{\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) t^{k+\lambda-2}$$

$$+ t(t+1)(2t+1) \sum_0^{\infty} (k+\lambda) c_k t^{k+\lambda-1} - \sum_0^{\infty} c_k t^{k+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow (t^4 + 2t^3 + t^2) \sum_0^{\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) t^{k+\lambda-2} + (2t^3 + 3t^2 + t)$$

$$\sum_0^{\infty} (k+\lambda) c_k t^{k+\lambda-1} - \sum_0^{\infty} c_k t^{k+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_0^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k t^{k+\lambda+2} + \sum_0^{\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k t^{k+\lambda+1}$$

$$+ \sum_0^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k t^{k+\lambda} + \sum_0^{\infty} 2(k+\lambda) c_k t^{k+\lambda+2} + \sum_0^{\infty} 3(k+\lambda) c_k t^{k+\lambda+1}$$

$$+ \sum_0^{\infty} (k+\lambda) c_k t^{k+\lambda} - \sum_0^{\infty} c_k t^{k+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_0^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k t^{k+2} + \sum_0^{\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k t^{k+1} +$$

$$+ \sum_0^{\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k t^{k+1} + \sum_0^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k t^{k} + \sum_0^{\infty} 2(k+\lambda) c_k t^{k+2}$$

$$+ \sum_0^{\infty} 3(k+\lambda) c_k t^{k+1} + \sum_0^{\infty} (k+\lambda) c_k t^{k} - \sum_0^{\infty} c_k t^{k} = 0$$

المعادلة الدليلية:

$$t^0 : \lambda(\lambda - 1) c_0 + \lambda c - c_0 = 0$$

$$\Rightarrow c_0 (\lambda (\lambda - 1) + \lambda - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \ \lambda_1 - \lambda_2 \in Z$$
$$t^1 : 2\lambda(\lambda - 1)c_0 + (1 + \lambda)(1 + \lambda - 1)c_1 + 3\lambda c_0 + (1 + \lambda)c_1 - c_1 = 0$$
$$\Rightarrow [2\lambda (\lambda - 1) + 3\lambda]\, c_0 + [(1 - \lambda)\, \lambda + (1 + \lambda) - 1]\, c_1 = 0$$
$$\Rightarrow [2\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda]\, c_0 + [\lambda^2 + \lambda + \lambda + 1 - 1]\, c_1 = 0$$
$$\Rightarrow [2\lambda^2 + \lambda]\, c_0 + [\lambda^2 + 2\lambda]\, c_1 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda\, (2\lambda + 1)\, c_0 + \lambda(\lambda + 2)\, c_1 = 0$$
$$\Rightarrow (2\lambda + 1)\, c_0 + (\lambda + 2)\, c_1 = 0$$
For $\lambda = -1 \Rightarrow - c_0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_0$

أمثال الحد العام:

$$t^k : (k + \lambda - 2)\, (k + \lambda - 3)\, c_{k-2} + 2(k + \lambda - 1)\, (k + \lambda - 2)\, c_{k-1}$$
$$+ (k + \lambda)\, (k + \lambda - 1)\, c_k + 2\, (k + \lambda - 2)\, c_{k-2} + 3(k + \lambda - 1)\, c_{k-1}$$
$$+ (k + \lambda)\, c_k - c_k = 0$$
$$\Rightarrow [(k + \lambda - 2)\, (k + \lambda - 3) + 2\, (k + \lambda - 2)]\, c_{k-2}$$
$$+ [2(k + \lambda - 1)\, (k + \lambda - 2) + 3\, (k + \lambda - 1)]\, c_{k-1}$$
$$+ [(k + \lambda)(k + \lambda - 1) + (k + \lambda) - 1]\, c_k = 0$$
$$\Rightarrow [(k + \lambda - 2)\, (k + \lambda - 1)]\, c_{k-2} + [(k + \lambda - 1)\, (2k + 2\lambda - 1)]\, c_{k-1}$$
$$+ [(k + \lambda)^2 - 1]\, c_k = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \Rightarrow (k - 3)(k - 2)\, c_{k-2} + (k - 2)\, (2k - 3)\, c_{k-1}$$
$$+ k(k - 2)\, c_k = 0 \quad ; \quad k \geq 2$$

لا نستطيع الاختصار على المقدار $(k + \lambda - 1)$ لأننا بتعويض قيمة λ حصلنا على $(k - 2)$ ويمكن لهذا المقدار أن يساوي الصفر عندما $k = 2$.

$$k = 2 \Rightarrow (-1)(0)\, c_0 + (0)\, (1)\, c_1 + (2)\, (0)\, c_2 = 0$$
$$\Rightarrow 0\, .\, c_0 + 0\, .\, c_1 + 0\, .\, c_2 = 0$$

c_2 اختيارية تنتج بدلالة c_0 و c_1 وهما ثابتان اختياريان.

$$k = 3 \Rightarrow 0\, c_1 + (1)\, (3)\, c_2 + 3\, (1)\, c_3 = 0$$

$$\Rightarrow 3c_2 + 3c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -c_2$$
$$k = 4 \Rightarrow 2c_2 + 10c_3 + 8c_4 = 0$$
$$\Rightarrow 2c_2 - 10c_2 + 8c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = c_2$$
$$k = 5 \Rightarrow c_5 = -c_2$$
$$k = 6 \Rightarrow c_6 = c_2$$

أوجدنا الثوابت كلها بدلالة c_2 وأما الثابت c_1 بدلالة c_0.

أي لدينا ثابتان كيفيان هما c_2، c_0.

$$w_1 = \sum_0^{\infty} c_k t^{k+\lambda_1} = t^{\lambda_1}\left[c_0 t^0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots\right]$$
$$= \frac{1}{t}\left[c_0 + c_0 t + c_2 t^2 - c_2 t^3 + c_2 t^4 - c_5 t^5 + c_2 t^6 - \ldots.\right]$$
$$= \frac{1}{t}\left[c_0(1+t)\right] + \frac{1}{t}\left[c_2(t^2 - t^3 + t^4 - t^5 \ldots\ldots)\right]$$
$$= \frac{c_0}{t}(1+t) + c_2 t\left[1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \ldots..\right]$$

ومنه:

$$w_1 = \frac{c_0}{t}(1+t) + c_2 \frac{t}{1+t}$$

نلاحظ أنه يوجد ثابتان كيفيان فهو حل عام للمعادلة الجديدة، نعوض كل حد بقيمته:

$$w = c_0 \frac{z}{z-1} + c_2 \frac{z-1}{z}$$

وهو حل عام للمعادلة المفروضة وهو المطلوب.

ملاحظة:

إن الجذر الأول $\lambda = +1$ يعطينا حل على شكل متسلسلة صحيحة معممة في حين قد يخفق الجذر الثاني وإذا لم يخفق الجذر الثاني فعندئذٍ يعطينا الحل العام دفعة

واحدة كما هو الحال في مثالنا المذكور أعلاه وعندها نحصل على المعادلة الحرجة ويكون أحد الثوابت اختيارية.

مثال (٨):

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار الصفر:

$$z(1-z)\,w'' - (1+z)\,w' + w = 0$$

الحل:

$$z^2(1-z)\,w'' - z(1+z)\,w' + zw = 0$$

$$w'' - \frac{z(1+z)}{z^2(1-z)}w' + \frac{z}{z^2(1-z)}w = 0$$

$z = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نكتب المعادلة الدليلية:

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda c_0 + d_0 = 0$$

$$a_1(z) = z\,a(z) = -\left.\frac{1+z}{1-z}\right|_{z=0} = -1 \Rightarrow a_1(0) = -1 = c_0$$

$$b_1(z) = z^2\,b(z) = \left.\frac{z}{1-z}\right|_{z=0} = 0 \Rightarrow b_1(0) = 0 = d_0$$

نعوض بالمعادلة الدليلية:

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 2 : \lambda_1 - \lambda_2 \in Z$$

نبحث عن حل من الشكل: $w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda}$

بالاشتقاق والتعويض نجد:

$$(z^2 - z^3)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda-2} - (z+z^2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$+z\sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda}=0$$

$$\Rightarrow \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda}-\sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda+1}$$

$$-\sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^{k+\lambda}-\sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^{k+\lambda+1}+\sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda+1}=0$$

$z^0: \lambda(\lambda-1)c_0-\lambda c_0=0 \quad ; \quad c_0\neq 0$

$\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \vee \lambda_2=2 \; ; \; \lambda_1-\lambda_2\in Z$ (الحالة الثالثة)

$z^k: (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k-(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)c_{k-1}-(k+\lambda)c_k$

$-(k+\lambda-1)c_{k-1}+c_{k-1}=0$

$\Rightarrow [(k+\lambda)(k+\lambda-1)-(k+\lambda)]c_k=[(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)+$

$(k+\lambda-1)-1]c_{k-1}$

$(k+\lambda)(k+\lambda-2)c_k=[(k+\lambda-1)^2-1]c_{k-1}$

$$c_k=\frac{(k+\lambda-1)^2-1}{(k+\lambda)(k+\lambda-2)}c_{k-1} \quad ; \quad k\geq 1$$

for $\lambda=0$ $c_k=\dfrac{(k-1)^2-1}{k(k-2)}c_{k-1}\Rightarrow (k-2)c_k=(k-2)c_{k-1} \; ; k\geq 1$

$k=1\Rightarrow -c_1=-c_0 \Rightarrow c_1=c_0$

$k=2\Rightarrow 0\,.\,c_2=0\,.\,c_1$ (c_2 ثابت اختياري)

$k=3\Rightarrow c_3=c_2$

$k=4\Rightarrow c_4=c_3=c_2$

$\vdots$

$\forall k\Rightarrow c_k=c_{k-1}=c_2$

نعوض بشكل الحل:

$$w=\sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow w = \sum_{0}^{\infty} c_k z^k$$

$$w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_k z^k + \dots$$
$$w = c_0 + c_0 z + c_2 z^2 + c_2 z^3 + \dots + c_2 z^k + \dots$$
$$w = c_0(1 + z) + c_2 z^2 [1 + z + z^2 + z^3 + \dots]$$

ومنه:

$$w = c_0 (1 + z) + c_2 z^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$w = c_0 (1 + z) + c_2 \frac{z^2}{1 - z}$$

وهو الحل العام لأنه يحوي على ثابتين اختياريين.

مثال (٩):

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$z (z - 1) w'' - z w' + w = 0$$

في جوار $z = 0$.

الحل:

نبحث عن حل من الشكل: $w = \sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda}$

نضرب طرفي المعادلة المفروضة بـ z فنجد:

$$z^2 (z - 1) w'' - z^2 w' + z w = 0$$

بالاشتقاق والتعويض:

$$(z^3 - z^2) \sum_{0}^{\infty} (k + \lambda)(k + \lambda - 1) c_k z^{k+\lambda-2} - z^2 \sum_{0}^{\infty} (k + \lambda) c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$+ z \sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} = 0$$

نقسم طرفي المعادلة على z^{λ} فنحصل على:

$$\Rightarrow \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+1} - \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^k$$
$$-\sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^{k+1} + \sum_0^\infty c_k z^{k+1} = 0$$

$z^0 : -\lambda(\lambda-1)c_0 = 0 \qquad c_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$

$z^k : (k+\lambda-1)(k+\lambda-2)c_{k-1} - (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k$
$\quad -(k+\lambda-1)c_{k-1} + c_{k-1} = 0$

$$(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k = [(k+\lambda-1)(k+\lambda-2) - (k+\lambda-1) + 1]c_{k-1}$$
$$(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k = [(k+\lambda-1)(k+\lambda-3) + 1]\, c_{k-1}$$

For $\lambda = 0 \Rightarrow k(k-1)c_k = [(k-1)(k-3)+1]\, c_{k-1}$

$\quad K(k-1)c_k = (k-2)^2 c_{k-1}$

for $k = 1 \Rightarrow 0 \,.\, c_1 = c_0 = 0$ (نلاحظ أننا فشلنا في الوصول إلى حل)

For $\lambda = 1 \Rightarrow k(k+1)c_k = (k-1)c_{k-1}$

$\quad k = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \,;\, k = 2 \Rightarrow 6c_2 = c_1 = 0 \;\ldots\ldots\; c_k = 0$

ومن ثمَّ يكون الحل:

$$w_1 = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} = z.\sum_0^\infty c_k z^k = z(c_0) = z \;;\; c_0 = 1$$

لنوجد الحل الثاني:

$$w_2 = w_1 \int \frac{e^{-\int a(z)dz}}{(w_1)^2} dz = z \int \frac{e^{\int \frac{dz}{z-1}}}{z^2} dz = z \int \frac{z-1}{z^2} dz$$

$$w_2 = z \ln z + 1$$

ومن ثمَّ يكون الحل العام هو:

$$w = Az + B(z \ln z + 1)$$

مثال (١٠):

ابحث في الحل العام للمعادلة:

$$(z^2 - z)\, w'' + (3z^2 - 2)\, w' + 12z\, w = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

نبحث عن حل من الشكل: $w = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda}$

نضرب طرفي المعادلة المفروضة بـ z فنجد:

$$z\,(z^3 - z)\, w'' + z(8z^2 - 2)\, w' + 12z^2\, w = 0$$

بالاشتقاق والتعويض:

$$\Rightarrow (z^4 - z^2)\sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda-2} + (8z^3 - 2z)\sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^{k+\lambda-1}$$
$$+ 12\sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda+2} = 0$$

نقسم طرفي المعادلة الناتجة على z^λ فنحل على:

$$\sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+2} - \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^k$$
$$+ 8\sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^{k+2} - 2\sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^k + 12\sum_0^\infty c_k z^{k+2} = 0$$

بالمطابقة نجد:

$$z^0 : -\lambda(\lambda - 1)c_0 - 2\lambda\, c_0 = 0 \Rightarrow (-\lambda^2 + \lambda - 2\lambda) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -1$$
$$z^1 : -(\lambda + 1)(\lambda)\, c_1 - 2(\lambda + 1)\, c_{1==0}$$
$$-(\lambda + 1)(\lambda + 2)\, c_1 = 0$$

For $\lambda = -1 \Rightarrow 0 \, . \, c_1 = 0$ (c_1 ثابت اختياري)

$$z^k : (k+\lambda-2)(k+\lambda-3)\, c_{k-2} - (k+\lambda)(k+\lambda-1)\, c_k$$
$$+ 8(k+\lambda-2)\, c_{k-2} - 2(k+\lambda)\, c_k + 12\, c_{k-2} = 0$$
$$\Rightarrow [(k+\lambda-2)(k+\lambda-3) + 8(k+\lambda-2) + 12]\, c_{k-2} =$$
$$= [(k+\lambda)(k+\lambda-1) + 2(k+\lambda)]\, c_k$$
$$\Rightarrow [(k+\lambda-2)(k+\lambda+5) + 12]\, c_{k-2} = (k+\lambda)(k+\lambda+1)\, c_k$$

For $\lambda = -1 \Rightarrow k(k+1)\, c_{k-2} = k(k-1)\, c_k \;\; ; \;\; k \geq 2$

$$k = 2 \Rightarrow c_2 = 3\, c_0$$
$$k = 3 \Rightarrow c_3 = 2\, c_0$$
$$k = 4 \Rightarrow c_4 = \frac{20}{12}\, c_0$$
$$\vdots$$
$$\forall k; c_k = \frac{k+1}{k-1} c_0$$

ومنه:

$$w_1 = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} = z^{-1}(c_0 + c_1 z + 3c_0 z^2 + 2c_0 z^3 + \ldots)$$
$$= c_1 + \frac{c_0}{z} + \sum_2^\infty \frac{k+1}{k-1} c_0 z^{k-1}$$

لنبدل $k \to k+2$ في الطرف الأيمن فنجد:

$$= c_1 + \frac{c_0}{z} + c_0 \sum_0^\infty \frac{k+3}{k+1} z^{k+1}$$
$$\Rightarrow w_1 = c_1 + c_0 \left[\frac{1}{z} + \sum_0^\infty \frac{k+3}{k+1} z^{k+1} \right]$$

مثال (١١):

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$z^2 (z^2 - 1) w'' + 2z^3 w' + 6w = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

لنكتب المعادلة المفروضة بالشكل الآتي:

$$w'' + \frac{2z^3}{z^2(z^2-1)} w' + \frac{6}{z^2(z^2-1)} w = 0$$

$$\Rightarrow w'' + \frac{2z}{z^2-1} w' + \frac{6}{z^2(z^2-1)} w = 0$$

$z = 0$ نقطة شاذة منتظمة. (لأنها تمثل نقطة عادية لأمثال w' وقطباً مضاعفاً لأمثال w)

نكتب المعادلة الدليلية:

$$a_1(z) = za(z) = z \cdot \frac{2z}{z^2-1} = \left.\frac{2z^2}{z^2-1}\right|_{z=0} = 0 \Rightarrow a_1(0) = 0 = c_0$$

$$b_1(z) = z^2 b(z) = z^2 \cdot \frac{6}{z^2(z^2-1)} = \left.\frac{6}{z^2-1}\right|_{z=0} = -6 \Rightarrow b_1(0) = -6 = d_0$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \in Z$ (الحالة الثالثة)

نبحث عن حل للمعادلة من الشكل:

$$w = \sum_0^{\infty} c_k z^{k+\lambda}$$

بالاشتقاق والتعويض:

$$(z^4 - z^2)\sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda-2} + 2z^3\sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$+6\sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} = 0$$

نقسم طرفي المعادلة المفروضة على z^λ فنجد:

$$\sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+2} - \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^k$$

$$+2\sum_0^\infty (k+\lambda)c_k z^{k+2} + 6\sum_0^\infty c_k z^k = 0$$

بالمطابقة نجد:

$$z^0 : [-\lambda(\lambda - 1) + 6]\, c_0 = (\lambda^2 - \lambda - 6]\, c_0 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = -2$$

$$z^1 : (-\lambda(\lambda + 1) + 6)\, c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$z^k : [(k+\lambda-2)(k+\lambda-3) + 2(k+\lambda-2)]\, c_{k-2} =$$

$$= [+(k+\lambda)(k+\lambda-1) - 6]\, c_k$$

$$\Rightarrow (k+\lambda-3)(k+\lambda+2)\, c_k = (k+\lambda-2)(k+\lambda-1)c_{k-2}\ ;\ k \geq 2$$

$$c_k = \frac{(k+\lambda-2)(k+\lambda-1)}{(k+\lambda-3)(k+\lambda+2)}c_{k-2}\ ;\ k \geq 2$$

$$\text{For: } \lambda = -2 \Rightarrow c_k = \frac{(k-4)(k-3)}{(k-5)(k)}c_{k-2}$$

$$k = 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}c_0$$

$$k = 3 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$k = 4 \Rightarrow c_4 = 0$$

ومنه نلاحظ: $c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = \ldots.. = c_k = 0$

ويكون الحل الأول هو:

$$w_1 = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} = z^{-2} \sum_0^\infty c_k z^k \quad ;\; k \geq 0$$

$$w_1 = z^{-2} \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots\right)$$

$$w_1 = \frac{c_0}{z^2} - \frac{1}{3} c_0 = c_0 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{z^2}\right)$$

For: $\lambda = 3 \Rightarrow c_k = \dfrac{(k+1)(k+2)}{k(k+5)} c_{k-2} \quad ; \; k \geq 2$

$k = 2 \Rightarrow c_2 = \dfrac{6}{7} c_0$

$k = 3 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = \ldots = 0$

$k = 4 \Rightarrow c_4 = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{6}{7} c_0 = \dfrac{5}{7} c_0$

$k = 6 \Rightarrow c_6 = \dfrac{28}{11} \cdot \dfrac{5}{7} c_0 = \dfrac{20}{11} c_0$

$k = 8 \Rightarrow c_8 = \dfrac{45}{52} \cdot \dfrac{20}{11} c_0 = \dfrac{225}{143} c_0$

ومن ثمَّ يكون الحل الثاني:

$$w_2 = z^3 \sum_0^\infty c_k z^k = c_0 z^3 \left(1 + \frac{5}{7} z^2 + \frac{20}{11} z^4 + \frac{225}{143} z^6 + \ldots\right)$$

والحل العام:

$$w = A w_1 + B w_2$$

مثال (١٢):

ابحث في حل المعادلة التفاضلية:

$$z(z+1)\, w'' + (z+5)\, w' - 4w = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

$$z^2 (z + 1) w'' + z(z + 5) w' - 4zw = 0$$

$$\Rightarrow w'' + \frac{z(z+5)}{z^2(z+1)} w' - \frac{4z}{z^2(z+1)} w = 0$$

$$\Rightarrow w'' + \frac{z+5}{z(z+1)} w' - \frac{4}{z(z+1)} w = 0$$

$z = 0$ قطب بسيط لـ $a(z)$

$z = 0$ قطب بسيط لـ $b(z)$ $\Leftarrow$ $z = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نبحث عن حل من الشكل:

$$w = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

بالاشتقاق والتعويض:

$$(z^2 + z^3) \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2} + (z^2 + 5z) \sum_0^\infty (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$- 4z \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda} + \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda+1}$$

$$+ \sum_0^\infty (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda+1} + 5 \sum_0^\infty (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda} - 4 \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda+1} = 0$$

$$\sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^k + \sum_0^\infty (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+1}$$

$$+ \sum_0^\infty (k+\lambda) c_k z^{k+1} + 5 \sum_0^\infty (k+\lambda) c_k z^k - 4 \sum_0^\infty c_k z^{k+1} = 0$$

$$z^0 : \lambda (\lambda - 1) c_0 + 5\lambda c_0 = 0$$

$$(\lambda^2 - \lambda + 5\lambda)\, c_0 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 4\lambda)\, c_0 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -4$; ($\lambda_1 - \lambda_2 \in Z$ الحالة الثالثة)

$$z^k : (k+\lambda)(k+\lambda-1)\, c_k + (k+\lambda-1)(k+\lambda-2)\, c_{k-1}$$
$$+ (k+\lambda-1)\, c_{k-1} + 5(k+\lambda)\, c_k - 4\, c_{k-1} = 0$$

$$[(k+\lambda)(k+\lambda-1) + 5(k+\lambda)]\, c_k +$$
$$+ [(k+\lambda-1)(k+\lambda-2) + (k+\lambda-1) - 4]\, c_{k-1} = 0$$

$$[(k+\lambda)(k+\lambda-1) + 5)]\, c_k + [(k+\lambda-1)(k+\lambda-1) - 4]\, c_{k-} = 0$$

$$(k+\lambda)(k+\lambda+4)\, c_k + [(k+\lambda-1)^2 - 4]\, c_{k-1} = 0$$

For : $\lambda = -4 \Rightarrow k(k-4)\, c_k + (k-3)(k-7)\, c_{k-1} = 0$

$$k = 1 \Rightarrow -3c_1 + 12c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = 4c_0$$

$$k = 2 \Rightarrow -4c_2 + 5c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{5}{4}\, c_1$$

$$k = 3 \Rightarrow -3c_3 + 0c_2 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$k = 4 \Rightarrow 0\, .\, c_4 - 3\, c_3 = 0 \Rightarrow$ c_4 ثابت اختياري

$$k = 5 \Rightarrow 5c_5 - 4c_4 = 0 \Rightarrow c_5 = \frac{4}{5}\, c_4$$

$$k = 6 \Rightarrow 12c_6 - 3c_5 = 0 \Rightarrow c_6 = \frac{1}{4}\, c_5$$

$$k = 7 \Rightarrow 21\, c_7 + 0\, c_6 = 0 \Rightarrow c_7 = 0$$

$$k = 8 \Rightarrow 32\, c_8 + 5\, c_7 = 0 \Rightarrow c_8 = 0$$

$$k = 9 \Rightarrow 45\, c_9 + 12\, c_8 = 0 \Rightarrow c_9 = 0$$

- -

ومن ثمّ يكون الحل:

$$w_1 = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} = z^\lambda \sum_0^\infty c_k z^k = z^{-4} \sum_0^\infty c_k z^k$$
$$= z^{-4}(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6 + c_7 z^7 + \ldots)$$

$$= z^{-4}(c_0 + 4c_0z + c_0z^2 + 0 + c_4z^4 + \frac{4}{5}c_4z^5 + \frac{1}{5}c_4z^6 + 0 + \ldots)$$

$$= z^{-4}[(1 + 4z + 5z^2)c_0 + (z^4 + \frac{4}{5}z^5 + \frac{1}{5}z^6)\, c_4]$$

$$= \left(\frac{1}{z^4} + \frac{4}{z^3} + \frac{5}{z^2}\right)c_0 + \left(1 + \frac{4}{5}z + \frac{1}{5}z^2\right)c_4$$

وهو يمثل الحل العام.