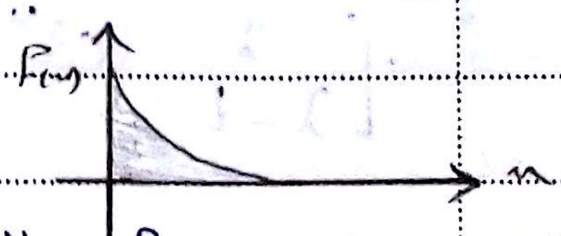
محاضرة السابعة

التوزيع الأسي: ليكن X متغير عشوائي له التوزيع الأسي

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$



التحقق من كون $f(x)$ دالة كثافة: واضح أن $f(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$$

التوقع الرياضي:

$$\Gamma_x = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

الإثبات:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx$$

تكامل بالتجزئة : $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-\lambda x} \Rightarrow v = -e^{-\lambda x}$

$$= [\underbrace{-x e^{-\lambda x}}_{=0}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

التباين : $\sigma_x^2 = V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

نثبت أن $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$ ، نكمل كالسابق

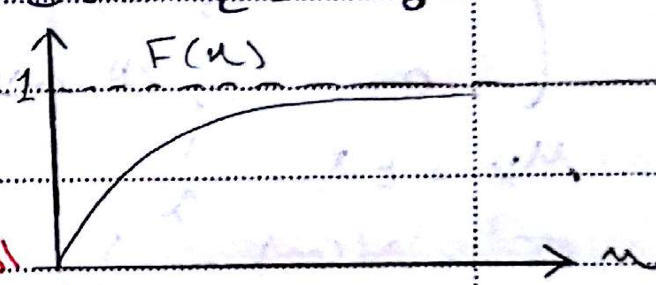
دالة التوزيع : $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$

الإثبات : $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \Rightarrow F(x) = 0 \; ; \forall x < 0$

$\forall t \in]-\infty, t[\quad f(t) = 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \lambda \int_0^{x} e^{-\lambda t} dt = [e^{-\lambda t}]_0^{x}$

$= 1 - e^{-\lambda x} \; ; \; 0 \leq x$



الدالة المولدة للعزوم : $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \; ; \; t < \lambda$

الإثبات :

$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{x(t-\lambda)} dx$

$= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - t)x} dx$ حتى يكون التكامل موجب

$= \left[\frac{\lambda}{\lambda - t} e^{-x(\lambda - t)}\right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

نكتب اختصاراً $X \sim EXP(\lambda)$

مثال : ليكن $X \sim EXP(\lambda)$ و المطلوب $\lambda = 2$

1) عين دالة التوزيع F (2) أوجد الدالة المولدة للعزوم و استنتج EX و $V(X)$

الحل : 1) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$

Subject: Date :   /   /

2) $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{2}{2-t}$; $t < 2$

$\mu_X = E(X) = M'_X(0) = \frac{2}{(2-t)^2}\Big]_{t=0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$E(X^2) = M^{(2)}_X(0) = \frac{2}{(2-t)^3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

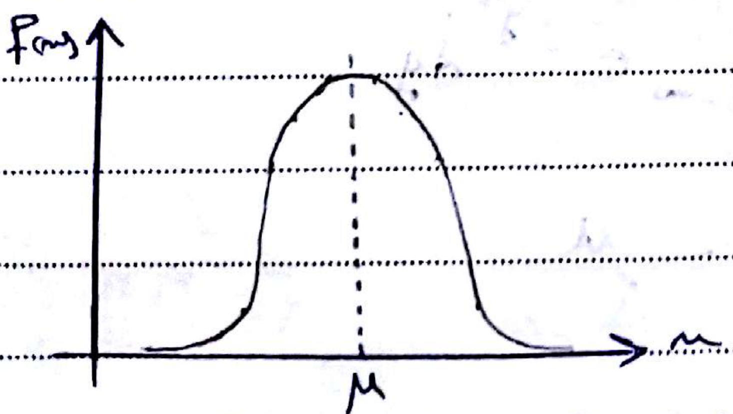
$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Normal distribution — التوزيع الطبيعي

نقول عن متغير عشوائي مستمر X انه يتبع التوزيع الطبيعي بالوسيطين μ و σ^2 $(\sigma > 0)$ ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إذا كانت الكثافة الاحتمالية لـ X لها الشكل

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

وفي رواية أخرى يسمى توزيع غاوص Gauss



منحني هذه الدالة له شكل الجرس

μ = مركز تناظر المنحني والتي سنعرف في الكلمة القادمة أنها التوقع الرياضي

التحقق من كون $f(x)$ كثافة احتمالية

1) $0 < f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$ بحيث $\sigma > 0$ ولوجود الأسيات

2) هل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ ؟ لدينا التكاملات التالية

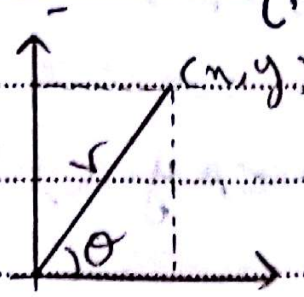
ملاحظة: الدالة الفردية إذا كاملناها على مجال مركزه الصفر فإن ناتج التكامل يساوي الصفر

$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \sqrt{2\pi}$

دالة فردية

$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 0$

$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}$



$y = r\sin\theta$

$x = r\cos\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

AL MARJI

Subject: Date: / /

لنفرض أن $y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + \mu \Rightarrow dx = \sigma dy$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$$ وهو المطلوب ...

أي دالة غير سالبة تكاملها من ∞- إلى ∞ يساوي 1 تصلح لأن تكون دالة كثافة احتمالية ، التوزيع الطبيعي يستخدم في الحياة العامة مثل الطول الطبيعي والوزن الطبيعي ، قيم الجهة الطبيعية ..... إلخ ، ولكل منها μ خاص بها

التوقع الرياضي : إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن $\mu_x = E(X) = \mu$

الإثبات :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + \mu \Rightarrow dx = \sigma dy$

$$= \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + \mu) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (0) + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{2\pi}) = \mu$$

التباين : $\sigma_x^2 = V(X) = \sigma^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = (\sigma y + \mu) \Rightarrow dx = \sigma dy$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + \mu)^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma^2 y^2 + 2\sigma\mu y + \mu^2) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Scanned by CamScanner

Subject: Date : / /

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{2\pi}) + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} (0) + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{2\pi}) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - \mu_x^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

الدالة المولدة للعزوم :

$$M_X(t) = e^{t\mu + t^2\frac{\sigma^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

الاثبات :

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{tx - \frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2)} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2 - x(2t\sigma^2) + 2\mu x + \mu^2)} dx$$

$$= e^{\frac{1}{2\sigma^2}[-(\sigma^2 t + \mu)^2 + \mu^2]} \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - (\sigma t + \mu)}{\sigma}\right)^2} dx}_{=1}$$

$$= e^{\frac{1}{2\sigma^2}[-(\sigma^2 t + \mu)^2 + \mu^2]} = e^{\frac{1}{2\sigma^2}[-\sigma^4 t^2 - 2\sigma^2 t\mu - \mu^2 + \mu^2]}$$

$$= e^{\frac{\sigma^2}{2}t^2 + t\mu} \Rightarrow M_X t = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

انتهت المحاضرة ~~الثامنة~~ السابعة

المحاضرة الثامنة

ملاحظة: يختلف التوزيع الطبيعي عن آخر باختلاف الوسيطين μ و σ^2 وحساب الاحتمالات من الشكل .... $P(a \le X \le b)$, يجب حساب تكاملة دالة الكثافة $f(x)$ بين a و b ولكنه أمر صعب.

حالة خاصة: التوزيع الطبيعي المعياري نتحول عن المتغير العشوائي Z أنه يتبع التوزيع الطبيعي المعياري اذا كان $Z \sim N(0,1)$ أي $E(Z) = \mu_Z = 0$

AL MARJI

الكثافة الاحتمالية لـ Z تعطى بالعلاقة $V(Z)=\sigma_Z^2=1$

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\ ;\ -\infty<z<+\infty$$

$$M_Z(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}=e^{\frac{t^2}{2}}\ ;\ \sigma^2=1$$

إذا كان $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فإن $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

مطلوب إثبات: إيجاد المتغير Z يعني معايرة المتغير ويسمى Z المتغير المعياري لـ X عند حساب الاحتمالات

$$P(a\le X\le b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ملاحظة: دالة كثافة Z نرمز لها بـ φ بدلاً من f

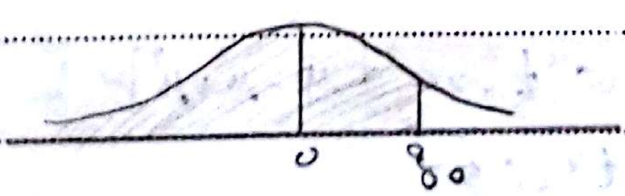
$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\ ;\ -\infty\le z<+\infty$$

دالة التوزيع z_0

$$P(Z\le z_0)=\Phi(z_0)=\int_{-\infty}^{z_0}\varphi(z)\,dz$$

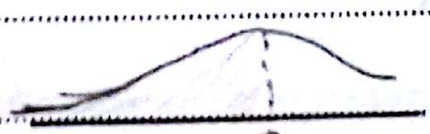
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

ولها جدول توزيع خاص



انتهت المحاضرة الثامنة

المحاضرة التاسعة



لأنه متناظر فإن $\Phi(0)=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow P(Z\le 0)=0,5=P(Z>0)$$

$$P(Z>0)=1-P(Z\le 0)=1-\Phi(0)$$

وبشكل عام

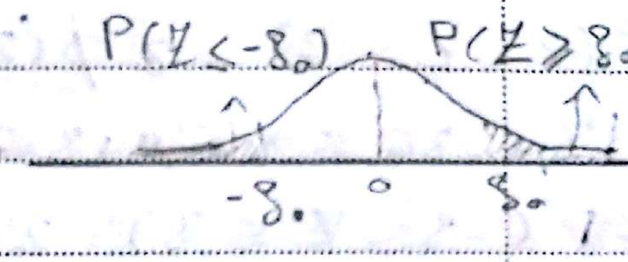
$$\forall z_0\in\mathbb{R}: P(Z\ge z_0)=1-P(Z\le z_0)$$

$$=1-\Phi(z_0)$$

$$P(z_1\le Z\le z_2)=F(z_2)-F(z_1)=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$$

Subject: Date : / /

$\Phi(-z_0) = \Phi(z_0) \Rightarrow$



$P(Z \le -z_0) = P(Z \ge z_0) = 1 - \Phi(z_0)$

$P(-z_0 \le Z \le +z_0) = \Phi(z_0) - \Phi(-z_0)$

$= \Phi(+z_0) - (1 - \Phi(z_0)) = 2\Phi(z_0) - 1$

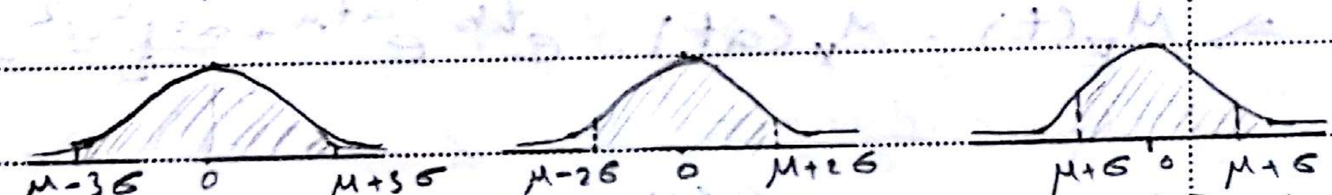
انا كده لم يكون مطبوع على الكل دوقة الامتحان

القاعدة التجريبية : إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

1) نسبة القياسات التي تقع في المجال $]\mu-\sigma, \mu+\sigma[$ تساوي $\%68.2640$

2) نسبة القياسات التي تقع في المجال $]\mu-2\sigma, \mu+2\sigma[$ تساوي $\%95.44$

3) نسبة القياسات التي تقع في المجال $]\mu-3\sigma, \mu+3\sigma[$ تساوي $\%99.74$



0.9974 ، 0.9544 ، 0.6826

مسألة : X متغير عشوائي ما ونريد أن نتأكد إذا كان X يتبع التوزيع الطبيعي أم لا باستخدام القاعدة التجريبية (3σ) : 1) نأخذ عينة عشوائية لـ X ولتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$

2) نحسب $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ ؛ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

3) نحسب $S = \sqrt{S^2}$ 4) نتحقق فيما إذا كانت النسبة القياسات العينة موافقة (بشكل تقريبي) مع القاعدة التجريبية في المجال $[\bar{X}-S, \bar{X}+S]$ يوجد تقريبا 68.26% من قياسات العينة ، في المجال $[\bar{X}-2S, \bar{X}+2S]$ يوجد تقريبا 95.44% من قياسات العينة ، وفي المجال $[\bar{X}-3S, \bar{X}+3S]$ يوجد تقريباً $\%99.74$ يمكن القول أن X له توزيع طبيعي

اثبات القاعدة التجريبية (3σ) :

1) $P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = P\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)$

$= P(-1 \le Z \le 1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826$

2) $P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = P\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right)$

AL MARJI

$= P(-2 \le Z \le 2) = 2\phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$

3) $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = P\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} \le \frac{X - \mu}{\sigma} \le \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right)$

$= P(-3 \le Z \le 3) = 2\phi(3) - 1 = 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9974$

ملاحظة: إذا كانت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

الإثبات: نذكر بأن $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$ لكن $\mu = 0, \sigma = 1$

أي أنه إذا كان X معيارياً فإن $\Rightarrow M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

لنثبت أن الدالة المولدة للعزوم لـ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ لها الشكل $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = aX + b ; a = \frac{1}{\sigma}, b = \frac{-\mu}{\sigma}$

$\Rightarrow M_Z(t) = M_X(at) = e^{tb} e^{at\mu + \frac{a^2 t^2 \sigma^2}{2}} = e^{-\frac{\mu}{\sigma}t + \frac{\mu}{\sigma}t + \frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$

- تمرين: إذا كانت $Z \sim N(0,1)$ فأوجد $P(Z < 1.96)$

الحل: $P(Z \le 1.96) = \phi(1.96) = 0.975$

- تمرين: إذا كانت $Z \sim N(0,1)$ وكان $P(Z \le z_0) = 0.9850$ فعين z_0

الحل: $\phi(z_0) = 0.9850 \Rightarrow z_0 = 2.17$

- تمرين: إذا كانت $Z \sim N(0,1)$ فأوجد $P(Z < -2.46)$

الحل: $P(Z < -2.46) = 1 - P(Z \ge 2.46) = 1 - \phi(2.46)$

$= 1 - 0.9931 = 0.0069$

تمرين: إذا كانت $Z \sim N(0,1)$ أوجد قيمة z_0 المحققة للعلاقة $P(Z < z_0) = 0.119$

الحل: $z_0 = -a ; a > 0 \Rightarrow P(Z < z_0) = P(Z < -a)$

$= 1 - P(Z < a) \Rightarrow 1 - \phi(a) = 0.119 \Rightarrow \phi(a) = 1 - 0.119$

$= 0.8810 \Rightarrow a = 1.18 \Rightarrow z_0 = -1.18$

تمرين: إذا كانت $X \sim N(50, 100)$ أوجد $P(42 < X < 55)$

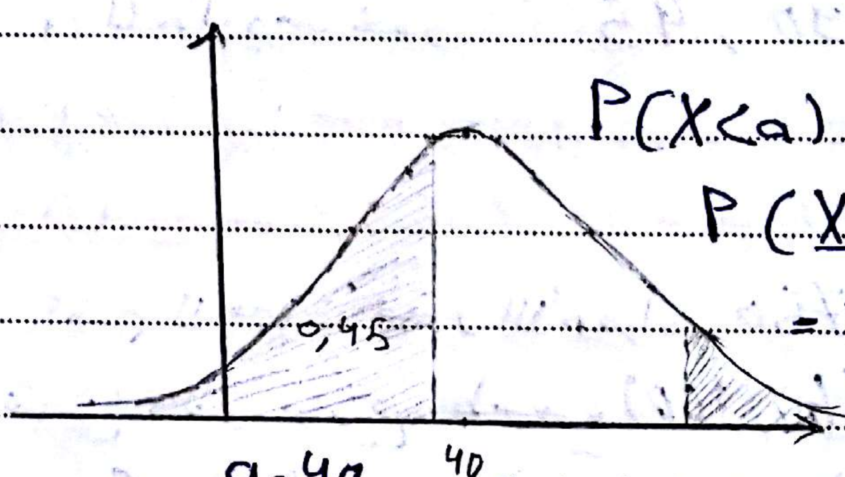
الحل: لدينا $\mu = 50 ;$ $\sigma^2 = 100 \Rightarrow \sigma = 10$

$$P(42<X<55)=P\left(\frac{42-50}{10}<\frac{X-50}{10}<\frac{55-50}{10}\right)$$
$$=P(-0,8<Z<0,5)=\phi(0.5)-\phi(-0.8)$$
$$=\phi(0,5)+\phi(0,8)-1=0.6915+0.7881-1=0.4796$$

انتهت المحاضرة التاسعة

المحاضرة العاشرة

تمرين: إذا كان $X \sim N(40,36)$ (1) عين قيمة a التي يقع على يسارها 45% تحت منحنى الكثافة (2) عين قيمة b التي تقع على يمينها 14% تحت منحنى الكثافة.



الحل: لدينا $P(X<a)=0,45$

$$P\left(\frac{X-40}{6}<\frac{a-40}{6}\right)$$
$$=P\left(Z<\frac{a-40}{6}\right)=\phi\left(\frac{a-40}{6}\right)=0,45$$

أصغر من 0,5 بالتالي المقدار سالب، لنفرض $z=\frac{a-40}{6}$

$$\phi(z)=\phi(-A)=1-\phi(A)=0,45 \Rightarrow \phi(A)=0,55 \Rightarrow A=0,13$$
$$\Rightarrow z=\frac{a-40}{6}=-0,13 \Rightarrow a=40-6\times0,13=39,22$$

(2) لدينا $P(X>b)=0,14 \Rightarrow P\left(Z>\frac{b-40}{6}\right)=0,14$

$$\Rightarrow 1-\phi\left(\frac{b-40}{6}\right)=0,14 \Rightarrow \phi\left(\frac{b-40}{6}\right)=0,86$$

لنفرض $z=\frac{b-40}{6} \Rightarrow \phi(z)=0,86 \Rightarrow z=1,08$

$$\therefore \Rightarrow \frac{b-40}{6}=1.08 \Rightarrow b=46.48$$

تمرين 2: إذا افترضنا أن طول شخص متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بالسنتيمترات $\mu=175$ و $\sigma=7.5$ والمطلوب: كيف يحدد مهندس ارتفاع أبواب الغرف في منزل بحيث لا يضطر أكثر من 2% من الأشخاص إلى تخفيض رؤوسهم عند الدخول و الخروج.

AL MARJI

Subject:

Date: / /

الحل: ليكن X المتغير العشوائي الدال على طول الشخص بالسانتيمتر وفق الفرضيات $X \sim N(175,(7.5)^2)$ لنرمز بـ a لارتفاع الأبواب

$P(X>a) \leq 0,02$

لنأخذ $P(X>a)=0,02 \Rightarrow 1-P(X<a)=0,02$

$1-\phi\left(\frac{a-175}{7.5}\right)=0,02 \Rightarrow \phi\left(\frac{a-175}{7.5}\right)=0,98$

$\Rightarrow \frac{a-175}{7,5}=2.06 \Rightarrow a=190,45 \text{ cm}$

أي أن a المطلوب تحقق $a \geq 190,45$

انتهت المحاضرة العاشرة

المحاضرة الحادية عشرة 3.2

مثال: تقدم لامتحان مقرر الإحصاء 750 طالباً بعد إعلان النتائج تبين أن درجاتهم تتوزع وفق توزيع طبيعي $N(60,100)$ فإذا تم تقسيم الطلاب إلى 3 فئات C و B و A حيث تحوي الفئة A الطلاب الذين درجاتهم تزيد عن 70 و الفئة B تحوي الطلاب الذين درجاتهم بين 70 و 50 و الفئة C تحوي الطلاب الذين درجاتهم أقل من 50

(1) عين عدد طلاب كل فئة (2) ما هي أقل درجة نالها طالب في العشرة الأوائل

الحل: ليكن X المتغير العشوائي الدال على درجة الطالب في الامتحان

(أوجد نسبة الطلاب في كل فئة) نسبة الطلاب في فئة A هي احتمال

$P(X>70)=P\left(Z>\frac{70-60}{10}\right)=P(Z>1)=1-\phi(1)$

$=1-0,8413=0,1587$

وبالتالي يكون عدد الطلاب في الفئة A يساوي $750 \times 0,1587=119$

نسبة الطلاب الفئة B $P(50 \leq X \leq 70)$

$=P\left(\frac{50-60}{10} \leq Z \leq \frac{70-60}{10}\right)=P(-1 \leq Z \leq 1)$

$\phi(1)-\phi(-1)=2\phi(1)-1=2 \times 0.8413=0.6826$

Subject: Date : / /

العدد يكون العدد الكلي ضرب النسبة الموافقة للفئة B بالتالي عدد الطلاب في B هو:

$750 \times 0.6826 = 512$

نسبة الطلاب في الفئة C:

$P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50-60}{10}\right)$

$= P(Z < -1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

العدد الموافق للفئة C:

$750 \times 0.1587 = 119$

2 - احتمال أن يكون طالب ما من العشرة الأوائل هو $\frac{10}{750} = \frac{1}{75}$

لنفرض أن a أقل درجة نالها طالب بالعشرة الأوائل

$P(X \geq a) = \frac{1}{75} = 0.01333$

$= P\left(Z > \frac{a-60}{10}\right) = 0.01333 \Rightarrow 1 - \phi\left(\frac{a-60}{10}\right) = 0.013333$

$\phi\left(\frac{a-60}{10}\right) = 1 - 0.013333 = 0.98666$

لنفرض $z = \frac{a-60}{10} \Rightarrow \phi(z) = 0.98666 \Rightarrow z = 2.22$

$\Rightarrow \frac{a-60}{10} = 2.22 \Rightarrow a = 82.2$

انتهت المحاضرة الحادية عشرة