المحاضرة السادسة: التباديل: $\langle S_n, o\rangle$ هي مجموعة كل التقابلات من $\{1,2,\dots,n\}$ إلى $\{1,2,\dots,n\}$ حيث n عدد صحيح.

سنرمز لها ب S_n: $f_1: \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$

$f(i)=j$ (تقابل أي متباين وشامل).

مثال: في S_3 العنصر: $f(1)=2 \quad f(2)=1 \quad f(3)=3$

$\{1,2,3\} \quad \{1,2,3\}$

بالسطر الأول العناصر والسطر الثاني صورها.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ترتيب الأعمدة لا يغير العنصر).

تم ب $3!$ طريقة تبديل العناصر.

• مقلوب العنصر (التبديل): هو التبديل بين السطرين:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad f(i)=j \Rightarrow f^{-1}(j)=i$$

$f(1)=2 \Rightarrow f^{-1}(2)=1$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

• التبديل المطابق: $f(i)=i$ يرمز له ب i_d.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

ملاحظة: إنه $||S_n|=n!||$ طرقة اختيار العناصر

$\underset{\text{الأول}}{n} \quad \underset{\text{الثاني}}{n-1} \quad \dots = n!$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

هنا 3 مرتبطة مع نفسها فنقول مثبتة (3) دالتها ثابتة.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\circ\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$ ← نبدأ من هنا

$\sigma\circ\pi(1)=\sigma(\pi(1))=\sigma(3)=3$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

• التعبير عن التباديل بالحلقات:

يمكن كتابة عناصر σ باستخدام ترميز الحلقات: $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$

$a_1\longrightarrow a_2 \quad a_2\longrightarrow a_3 \quad a_{k-1}\longrightarrow a_k \quad a_k\longrightarrow a_1$

مثال: $(1\ 3\ 2)$ $f(1)=3$ $f(3)=2$ $f(2)=1$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

مثال: $\sigma=(1\ 2\ 4)$ نبحث عن كل الحلقات بالتبديل.

ملاحظة: إن الحلقات الأحادية تحذف من التعبير الحلقي.

$\pi=(1\ 3)(2\ 4)$

نبدل بالكلمة تبديل دوراني ليس عشوائي.

$(1\ 3\ 2)=(3\ 2\ 1)\neq(1\ 2\ 3)$

// المهم نكتب الترتيب بشكل جداء حلقات".

$\sigma\circ\pi=(1\ 2\ 4)\circ(1\ 3)(2\ 4)$

إذا دل تكرار لأول عنصر يأتي يكون متناظرين أو تركيب

$=(1\ 3\ 2)\ (\underline{4})$ ثم.

ملاحظة: id هو الوحيد الذي يكتب بشكل حلقات دامجة $(1)(2)\dots(n)$

لأن كل عنصر مرتبط بنفسه:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&2&7&5&1&6&3\end{pmatrix}=(1\ 4\ 5)(3\ 7)$$

$$\pi=(1\ 5\ 3\ 2)(6\ 8)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&2&4&3&8&7&6\end{pmatrix}$$

تمرين

في S_6 أوجد:

① $(1\ 3\ 4)(2\ 6\ 1)$ → تركيب.

② $(2\ 3\ 4)(4\ 5\ 6)$ → تركيب

③ $(1\ 2\ 4)(3\ 5)$ → تبديل

① $= (1\ 2\ 6\ 3\ 4)$

② $= (2\ 3\ 4\ 5\ 6)$

3) $= (1\ 2\ 4)(3\ 5)$.

④ $(2\ 6\ 1)(1\ 3\ 4) = (1\ 3\ 4\ 2\ 6)$

ملاحظة: إن تركيب التوابع ليس تبديلياً ما ① و ④.

تركيب التباديل عملية غير تبديلية لكن تركيب التباديل هو عملية تجميعية.

الجلسة السابقة: أوجد ناتج الحلقات:

$\sigma \circ \pi = (1\ 2\ 4)(1\ 3)(2\ 4)$

$= (1\ 3\ 2)(4)$

تعريف: أي عنصر في S_n يقال إنه زوجي أو فردي ويقال عن جميع العناصر الزوجية في S_n بـ A_n. إن الحيادي (id) هو تبديل زوجي $\forall n \geq 2$

• الحلقة $(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sigma$ إذا كانت k زوجي فإن التبديل σ يكون فردي وبالعكس.

• إن التبديل المكتوب كجداء حلقات $\pi = (a_1 \dots a_k)(b_1 \dots b_n)(c_1 \dots c_m)$ إذا كانت n و m أعداد زوجية وكان k عدد فردي فإنه سيكون π

زوجي = فردي + فردي + زوجي.

مثال: ما هي التباديل الزوجية مما يلي:

$(1\ 2\ 4\ 5)$ فردي ، $(1\ 3\ 2)$ زوجي

$(1\ 3\ 2)(4\ 5)(7\ 8)$ زوجي

$\underbrace{(1\ 2\ 3)(3\ 2)}_{\text{تركيب التوابع}} = (1\ 2)$

ملاحظة: إن البنية $(S_n, \circ)$ زمرة ليست تبديلية

كل S_n مغلقة و $\circ$ تجميعي والحيادي في S_n بالنسبة للتركيب هو id

ونظير $\sigma \in S_n$ هو σ^{-1} (المقلوب).

$|S_n| = n!$ $\quad |A_n| = \frac{n!}{2}$

$|S_3| = 3! = 6.$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_3 = \{ id, (2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3), (1\ 2), (1\ 2\ 3) \}$$

أوجد A_3.

$$A_3 = \{ id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \}$$

ملاحظة $\Rightarrow |A_4| = \frac{4!}{2} = 12.$ $\quad // |A_n| = \frac{n!}{2} //.$

سؤال هل $\langle A_3, \circ \rangle$ زمرة وعلل ذلك.

$\circ$	id	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
id	id	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1)(2)(3) = id$
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1)(2)(3) = id$	$(1\ 2\ 3)$

زمرة مغلقة و تحتوي id المحايد و النظير:

$(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2)^{-1}$, إذن $\langle A_n, \circ \rangle$ زمرة.

مثال: هل البنية $\langle E, \circ \rangle$ حيث $E = \{id, (1\ 4\ 2), (1\ 2\ 4)\}$ زمرة وعلل ذلك.

$(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2) = id \qquad (1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3\ 2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2\ 1\ 3) = (1\ 3\ 2)$$

$|\langle (1\ 2\ 3) \rangle| = ?$

الفقرة الثامنة: الزمر الدوارة:

لتكن $\langle G,*\rangle$ زمرة و $g \in G$.

نرمز بالرمز $\langle g\rangle = \{g^k : k \in \mathbb{Z}\}$

إنه $\langle g\rangle$ هي زمرة، هي زمرة مولدة بالعنصر g : زمرة مولدة بالعنصر g دوارة

$\langle g,+\rangle$. $g \in G$

$\langle g\rangle = \{k.g : k \in \mathbb{Z}\}$

تعريف: في $\langle G,*\rangle$ نقول عن أنه $g \in G$ لعنصر دور منته يساوي n إذا كان $g^n = e$ ونرمز ب $|g| = 0$, $|g| = n$

بالتالي إذا كان g دوره n فإن: $|\langle g\rangle| = n$. $\langle g\rangle = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$

ملاحظة: $|g| = |\langle g\rangle|$

دور — رتبة

أمثلة: في $\langle G,+\rangle$:

(1) $\langle 1\rangle = \langle \mathbb{Z},+\rangle$

حسب التعريف: $1.k : k \in \mathbb{Z}$

نتيجة: $\langle n\rangle = \langle n\mathbb{Z},+\rangle$ $\langle 2\rangle = \langle 2\mathbb{Z},+\rangle$

(2) في $\langle G,*\rangle$

$\langle 1\rangle = \{1\}$, $1^k : k \in \mathbb{Z}$

$\langle [1]\rangle = \langle \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\rangle$ $k.[1] = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$[1]$ صف تكافؤ، البواقي، بالزمر القيمة

(3) $\langle \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+\rangle$

$\langle 0\rangle = \langle [0]\rangle = \{0\}$ $\langle 1\rangle = \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

$\langle 2\rangle = 2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{0,2,4,6\}$

$\langle [2]\rangle = \{[2]^k ; k \in \mathbb{Z}\}$

$\langle 3\rangle = \{3,1,0,2,4,6,7,8\} = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

$\langle 4\rangle = \frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ $\langle 5\rangle = \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$

مبرهنة: $G = \langle g\rangle = \{e, g, \dots, g^{n-1}\}$ زمرة دوارة، و H زمرة جزئية منها، ولتكن $H = \langle g^k\rangle$ حيث G زمرة منتهية، $|G| = n$ فإنه $|H| = \frac{n}{k}$

حسب مبرهنة لاغرانج، نرمز ... ($|H| = \frac{n}{k}$)

/ /

حيث $L = gcd(n,k)$.

مثال: $|G| = 24$ حيث $|G| = |\langle g\rangle| = 24$ ، H أوجد عناصر الزمرة الجزئية.

$H = \langle g^{15}\rangle = \{g^0, g^{15}, (g^{15})^2, \underset{\text{تكرار}}{\ldots}, (g^{15})^7\}$

أوجد $|H|$.

$$|H| = \frac{24}{gcd(24,15)} = \frac{24}{3} = 8$$

مبرهنة: لتكن $\langle G, *\rangle$ زمرة

حيث $G = \langle g\rangle$ فإن: ① إذا كان لـ g دور غير منتهي عندها
$G \cong \langle Z, +\rangle$

② إذا كان لـ g دور منتهي n ؛ $|g| = o(g) = n$
فإن: $G \cong \langle Z/nZ, +\rangle$.

تعريف: لتكن $C_n = \langle x\rangle = \{e, x, \ldots, x^{n-1}\}$ نعرف عليها
$x^i x^j = x^k$ ؛ $i+j = k \pmod n$

أكتب جدول كيلي لـ $\langle C_5, \circ\rangle = \{e, x, x^2, x^3, x^4\}$

$\circ$	e	x	x^2	x^3	x^4
e	e	x	x^2	x^3	x^4
x	x	2	3	4	0
x^2	2	3	4	0	1
x^3	3	4	0	1	2
x^4	4	0	1	2	3

الفوق هو

فما دام أن C_n زمرة إبدالية
يكفي e (مكان ظهوره يبين ما هو النظير)

مثال $\langle C_3, \circ\rangle$ //

* دور التباديل: في S_4 أوجد $|\langle(1\ 2\ 4)\rangle|$ يحوي 3 عناصر.

$(1\ 2\ 4)^k$

$(1\ 2\ 4)^2 = (1\ 2\ 4)(1\ 2\ 4) = (1\ 4\ 2)$

$(1\ 2\ 4)^3 = (1\ 4\ 2)(1\ 2\ 4) = (1)(2)(4) = id$

$= \{id, (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\}$

$|(1\ 2\ 4)| = 3$

$|(1\ 3\ 5)(2\ 6\ 7)| = ?$

/ /

مبرهنة: الآن σ تمثيل ما مكون من r حلقة أي بحيث $|\sigma_i| = k_i$

فإن: $|\sigma| = \underline{Lcm}\{k_i \; ; \; 1 \le i \le r\}$

المضاعف المشترك الأصغر (less)

$r = 2$

مثال: أوجد رتبة $(1\ \underset{3}{2\ 4})(3\ \underset{2}{7})$

$|(1\ 2\ 4)| = 3$

$|(3\ 7)| = 2$

$(3\ 7)^2 = (3\ 7)(3\ 7) = (3)(7) = id.$

$|(1\ 2\ 4)(3\ 7)| = Lcm\{2, 3\} = 6.$

$\sigma \in S_4$ لعدد عناصر S_4 هو $4!$ فإن max الرتبة σ هي $4!$.

إذا كانت $\langle (3\ 7)(1\ 2\ 4) \rangle$ تأخذ العنصر الأس 6.

ملاحظة: هنا ال $\langle ? \rangle \cong S_n$ إذا أنه وجد ال γ ال S_n يرمز للعدد لعنصر وحيد ولكن يمكن أن يكون مولداً آخر في مثال.

ملاحظة: $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, *)$ زمرة (أنا في الضرب)

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{[k] \; , \; gcd(k, n) = 1\}$

من كافؤ.

مثال $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^* = \{[1], [5], [7], [11]\}$

$|G \times H| = |G| \cdot |H|$

تبادلي ← زمرة دائرية $\langle (g, h) \rangle$

ترك المولد بالنسبة للأولى.

المحاضرة التاسعة: ✗ العلاقات و الدوال ✗

تعريف: لتكن A، B مجموعتين غير خاليتين نسمي أي مجموعة غير خالية من الجداء الديكارتي $A \times B$ بيانية وهذا البيان يعرف علاقة ثنائية R.

$a \in A, b \in B \; ; \; aRb \; . (a, b) \in R \; (G)$

ونقول أن a ارتبطت بـ b وفق العلاقة R ونسمي A منطلق العلاقة و B مستقر العلاقة

ملاحظة: تكون العلاقة R تابعاً إذا وفقط إذا أمنا أجل كل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد

$y \in B$ حيث xRy ونقول ان y صورة x وفق R $\quad y = R(x)$

• العلاقة العكسية لعلاقة ما: لتكن A ، B مجموعات غير خالية بيانها G معرفة حسب العلاقة R نرمز للعلاقة الانعكاسية لـ R بـ R^{-1} و G^{-1} بيانه R^{-1}.

$(a,b) \in G \Rightarrow (b,a) \in G^{-1}$

$aRb \Rightarrow bR^{-1}a$

• قطر المجموعة: $D_{A^2} = \{(a,b) \in A^2 = A \times A \,;\, a = b\}$

مثال: $A = \{1,2,3\}$ ، $G = \{(1,2)(2,3)(1,3)(3,3)\}$

$D_{A^2} = \{(3,3)\}$

• عند قطر البيان $D_{A^2} \not\subset G$ ← R ليست انعكاسية.

• الصفات (صفات العلاقة) لـ R تعرف: لتكن R علاقة ثنائية في المجموعة A (أي منطلقة ومستقر R هو A).

أ- الصفة الانعكاسية: $D_{A^2} \subseteq G \Leftrightarrow R$ انعكاسية.

$\forall x \in A : xRx \;;\; (x,x) \in G$

ب- الصفة التناظرية: $G = G^{-1} \Leftrightarrow R$ تناظرية.

$\forall a,b \in A,\; aRb \Rightarrow bRa$ أي $(a,b) \in G \Rightarrow (b,a) \in G$

تعريف R^{-1}

ج- الصفة التخالفية:

$\forall x,y \in A,\; (xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$

$(y,x)(x,y) \in G \Rightarrow x = y$

$xRy \,,\, yRx \Rightarrow x \neq y$

المثال G تخالفية لان اذا عكسناها ليست تخالفية نضيف $(2,1)$.

دائما القطر تخالفية وتناظرية. هو فقط الذي يحقق الصفتين معا.

اذا كانت $D_{A^2} \neq G$ بالتأكيد G ليست تخالفية وليست تناظرية.

ملاحظة: مثال G بيان في مجموعة $A \times A$ و D_{A^2} بيانه:

اذا كانت G تناظرية ⇐ G ليست تخالفية وبالعكس.

تكون R تناظرية وتخالفية في حال R علاقة المساواة أي $G = D_{A^2}$

د. الصفة المتعدية: R متعدية $\Leftrightarrow G \circ G \subseteq G$

$\forall x,y,z \in A: (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$

$[(x,y) \in G] \wedge [(y,z) \in G] \Rightarrow (x,z) \in G$

نتائج: - إذا كانت R انعكاسية ⟸ R^{-1} انعكاسية.

- - R تخالفية ⟸ R^{-1} تخالفية.

- - R تناظرية ⟸ R^{-1} تناظرية.

- - R متعدية ⟸ R^{-1} متعدية.

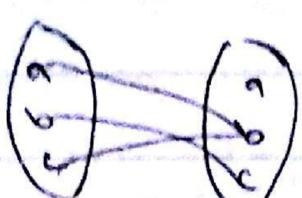
- - R تام ⟸ R^{-1} ليس بالضرورة تام.

- - R تقابل ⟸ R^{-1} تقابل.

(التخالفية) $x \neq y$ $\quad (y,x) \in G^{-1}$, $(x,y) \in G^{-1}$ $\quad (x,y) \in G$, $(y,x) \in G$

مثال: $G = \{(a,b), (b,c), (c,b)\}$

// G تام ولكن G^{-1} ليس تام //



إذن R العلاقة البيانية G تام بينما R^{-1} - G^{-1} ليس تام

• تعريف تركيب العلاقات: لتكن R_1 و R_2 علاقتين معرفتين في مجموعة A نرمز $R_2 \circ R_1$ بيانها $G_2 \circ G_1$ وتعرف كما يلي:

$(a,c) \in G_2 \circ G_1 \Leftrightarrow \exists b \in A: (a,b) \in G_1 \wedge (b,c) \in G_2$

أو $a(R_2 \circ R_1)c \Leftrightarrow \exists b \in A, aR_1b \wedge bR_2c$

مثال: $A = \{1, 2, 3\}$

$G_1 = \{(1,1), (2,1), (3,2)\}$

$G_2 = \{(3,1), (3,3), (1,2)\}$

أوجد $G_2 \circ G_1$, $G_1 \circ G_2$

الحل: $G_1 \circ G_2 = \{(3,1), (3,2), (1,1)\}$ $\quad G_2 \circ G_1 = \{(1,2), (2,2)\}$

أوجد التركيب لو أخذنا العلاقات كالتالي:

$xR_1y \Leftrightarrow x + y + 2 = 6$

$xR_2y \Leftrightarrow x \cdot y = 8$

$x(R_2 \circ R_1)y = xR_2(R_1y)$

• علاقة الترتيب: لتكن R علاقة في مجموعة A نقول عن R أنها علاقة ترتيب في A
إذا كانت R علاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية. في حال R علاقة
ترتيب نرمز لها ب (≤) أي $(xRy \Rightarrow x \le y)$ ونقول عن
R أنها علاقة ترتيب كلي إذا كان كل عنصرين من A متقارنين وفقه (≤)

مثال: $(\mathbb{R}, \le)$ علاقة ترتيب كلي و الاحتواء // ترتيب جزئي //

مثال: لتكن $M_n(\mathbb{R})$ معرفة عليها العلاقة R حيث $A, B \in M_n(\mathbb{R})$
فإن: ARB حيث $a_{ij} \le b_{ij}$; $i,j = 1 \ldots n$
هل R علاقة ترتيب وإذا كانت علاقة ترتيب هل هي علاقة ترتيب كلي أم
جزئي ولماذا.

الحل: ① الصفة الانعكاسية $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = a_{ij} \; , \forall i,j = 1 - n$
$\Rightarrow a_{ij} \le a_{ij} \Rightarrow ARA \Rightarrow$ R انعكاسية.

② تخالفية

$\forall A, B \in (M_n(\mathbb{R}))$.
$ARB \wedge BRA \Rightarrow a_{ij} \le b_{ij} \wedge b_{ij} \le a_{ij} \; . \forall i,j = 1 - n$
$\Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow A = B$

③ متعدية $\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{R}) \; , \; ARB \wedge BRC$
$a_{ij} \le b_{ij} \wedge b_{ij} \le c_{ij} \Rightarrow a_{ij} \le c_{ij} \; , \forall i,j = 1 \ldots n$
$\Rightarrow ARC$

⇐ R علاقة ترتيب في $M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

⇐ $a_{ij} \not\le b_{ij} \Rightarrow b_{ij} \le a_{ij}$

⇐ A مثال لتبيان العلاقة ليست ترتيب كلي.

• علاقة التكافؤ: إذا كانت R علاقة في مجموعة A نقول عن R أنها علاقة تكافؤ
إذا كانت R علاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية في هذه الحالة نرمز لـ R ب ≡

تعريف: صف تكافؤ عنصر هو المجموعة العناصر التي ترتبط بهذا العنصر وفق العلاقة R ونرمز له ب [a]
$\forall a \in A : [a] = \{x \in A : xRa\}$