◄ دكتور المادة: ملك مارديني

◄ المحاضرة: العاشرة

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الجزئية

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ حل تمرين.

٢ـ المعادلات التفاضلية الجزئية.

**حل تمرين المحاضرة التاسعة:**

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} : z(0,t) = z(3,t) = 0 \,\&\, z(x,0) = 10\sin(2\pi x) - 6\sin(4\pi x)$$

**الحل:**

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة: $L\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] = 4L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]$

$$SZ(x,S) - z(x,0) = 4Z''(x,S)$$

من شروط البدء لدينا:

$$z(x,0) = 10\sin(2\pi x) - 6\sin(4\pi x) \overset{\text{نعوض}}{\Longrightarrow} 4Z'' - SZ = -10\sin(2\pi x) + 6\sin(4\pi x)$$

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية غير متجانسة نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

(بدون طرف ثاني) أي : حيث مجموعة الحلول لها من الشكل $4Z'' - SZ = 0 : z = e^{\lambda x}$

وبالتالي نكتب المعادلة المميزة بعد اشتقاق $e^{\lambda x}$ وتعويضها في المعادلة كونه حل للمعادلة

$$4\lambda^2 - S = 0 \to \lambda^2 = \frac{S}{4} \to \lambda_1 = \frac{\sqrt{S}}{2} \;\&\&\; \lambda_2 = -\frac{\sqrt{S}}{2}$$

وبالتالي الحل العام هو تركيب خطي للحلين الخاصين المرافقين للقيمتين $\lambda_1 \& \lambda_2$

$$Z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \to Z_1 = C_1 e^{\frac{\sqrt{S}}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{S}}{2}x}$$

نوجد حل خاص للمعادلة مع طرف ثاني بالنظر إلى الطرف الثاني نلاحظ أنه:

$$Z_2 = A\sin(2\pi x) + B\sin(4\pi x) \xrightarrow{\text{لنوجد المشتق من المرتبة الثانية}}$$
$$Z_2' = 2\pi A\cos(2\pi x) + 4\pi B\cos(4\pi x)$$

$$Z_2'' = -4\pi^2 A\sin(2\pi x) - 16\pi^2 B\sin(4\pi x)$$

نعوض الآن $Z' \& Z''$ في المعادلة مع طرف ثاني :

$$4Z'' - SZ = -10\sin(2\pi x) - 6\sin(4\pi x)$$

$$4[-4\pi^2 A\sin(2\pi x) - 16\pi^2 B\sin(4\pi x)] - S[A\sin(2\pi x) + B\sin(4\pi x)]$$
$$= -10\sin(2\pi x) + 6\sin(4\pi x)$$

$$-16\pi^2 A\sin(2\pi x) - 64\pi^2 B\sin(4\pi x) - SA\sin(2\pi x) - SB\sin(4\pi x)$$
$$= -10\sin(2\pi x) + 6\sin(4\pi x)$$

$$(16\pi^2 + S)A\sin(2\pi x) + (64\pi^2 + S)B\sin(4\pi x)$$
$$= 10\sin(2\pi x) - 6\sin(4\pi x)$$

حيث ضربنا طرفي المعادلة ب $-1$ وأخرجنا عامل مشترك لكي نستيطع المطابقة مع الطرف الثاني والآن بالمطابقة نجد:

$$(16\pi^2 + S)A = 10 \to A = \frac{10}{16\pi^2 + S} \;\&\; (64\pi^2 + S)B = 6$$

$$\to B = \frac{6}{(64\pi^2 + S)}$$

نعوض في $Z_2$ كل من $A \& B$ ومنه :

$$Z_2 = \frac{10}{16\pi^2 + S}\sin(2\pi x) - \frac{6}{(64\pi^2 + S)}\sin(4\pi x)$$

والحل الأخير هو : $Z = Z_1 + Z_2$

$$Z = C_1 e^{\frac{\sqrt{S}}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{S}}{2}x} + \frac{10}{16\pi^2 + S}\sin(2\pi x) - \frac{6}{(64\pi^2 + S)}\sin(4\pi x)$$

**لإيجاد الثوابت $C_1 , C_2$ لدينا القانون الأساسي** $Z(x,S) = \int_0^\infty z(x,t)e^{-St}\,dt$

ولكن لدينا الشروط الابتدائية $z(0,t)\&\&z(3,t)$ ومنه نستخدم القانون لهما:

$$Z(0,S) = \int_0^\infty z(0,t)e^{-St}\,dt = 0 \to Z(0,S) = 0$$

نعوض في $Z$ ومنه $x = 0 \overset{\text{عندما}}{\Longrightarrow} Z = 0$ ومنه :

$$Z = C_1 + C_2 + 0 = 0 \to C_2 = -C_1 \ldots\ldots\ldots (1)$$

**الشرط الثاني:**

$$Z(3,S) = \int_0^\infty z(3,t)e^{-St}\,dt = 0 \overset{\text{نعوض}}{\Longrightarrow} Z = 0 \overset{\text{عندما}}{\Longrightarrow} x = 3 \to$$

$$Z = C_1 e^{\frac{3}{2}\sqrt{S}} + C_2 e^{-\frac{3}{2}\sqrt{S}} + 0 = 0 : C_2 = -C_1 \ (1)\text{لدينا من}$$

$$Z = C_1\left(e^{\frac{3}{2}\sqrt{S}} - e^{-\frac{3}{2}\sqrt{S}}\right) = 0 \to C_1 = C_2 = 0 \xRightarrow{\text{نعوض في الحل العام}}$$

$$Z = \frac{10}{16\pi^2 + S}\sin(2\pi x) - \frac{6}{(64\pi^2 + S)}\sin(4\pi x)$$

نأخذ الآن التحويل العكسي للابلاس ومنه:

$$L^{-1}[Z(x,S)] = L^{-1}\left[\frac{10}{16\pi^2 + S}\right]\sin(2\pi x) - L^{-1}\left[\frac{6}{(64\pi^2 + S)}\right]\sin(4\pi x)$$

$$z(x,t) = 10e^{-16\pi^2 t}\sin(2\pi x) - 6e^{-64\pi^2 t}\sin(4\pi x)$$

## المعادلات التفاضلية الجزئية

لقد مر معنا سابقاً تعريف المشتق الجزئي بالنسبة لمتغير ما حيث كان:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x}$$

حيث أن الدالة $z$ تابعة للمتغيرين $x,y$ المستقلين حيث أطلقنا عليه اسم المشتق الجزئي للدالة $z$ بالنسبة للمتغير $x$ مشتق من المرتبة الأولى كذلك الأمر بالنسبة ل $y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x,y)}{\Delta y}$$

المشتق الجزئي للدالة $z$ من المرتبة الأولى بالنسبة للمتغير $y$ وذلك باعتبار $x$ ثابتة كما أن

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1}\partial x}$$

المشتق من المرتبة $n$ بالنسبة ل $x||y$ ومنه يأتي تعريفنا للتفاضل الكلي :

١) يعطى تعريف التفاضل للسطح $F(x,y,z) = 0$ التابع لثلاث متغيرات مستقلة بالعلاقة :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالنسبة للسطح الذي يتعلق ب $n$ متغير

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots, x_n) = 0$$

فإن تفاضله التام هو $dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \;\dots\dots\dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0$

٢) لدينا حالة خاصة في حال كان السطح تابع للمتغيرين المستقلين $x, y$ بحيث $z = z(x, y)$

$$dZ = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0$$

٣) في حال كان $x, y$ تابعان للوسيط $t$ بحيث: $x = x(t) \;\&\&\; y = y(t)$ عندها يكون:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

حيث أخذنا تفاضل $x$ التام بالنسبة ل $t$ لأن $x$ تتبع ل $t$ فقط فيكون تفاضلها تام وليس جزئي أما في حال كانت $x$ تابعة لمتغيرين فعندها نأخذ مشتق جزئي و هذا ما سنجده في الحالة التالية

٤) إذا كانت $Z = Z(x, y)$ وكانت $x = x(t_1, t_2) \;\&\&\; y = y(t_1, t_2)$ فإن:

$$\frac{\partial Z}{\partial t_1} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1} \;\&\&\; \frac{\partial z}{\partial t_2} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_2}$$

٥) في حال كانت $F(x, y) = 0$ دالة ضمنية وكانت $y$ تابعة ل $x$ عندئذ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

طيب ومن وين جبناه....؟؟؟ حسب التفاضل التام للسطح $F$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 : F(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = -\frac{\partial F}{\partial y} dy \xrightarrow{\text{نقسم على } dx} \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

٦) إذا كانت $F(x,y,z)=0$ وكانت $z=z(x,y)$ عندها :

من وين جبناه....؟؟؟

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \&\& \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

لدينا $dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz$ حيث

تابع ل $z=z(x,y):x,y$ ومنه $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

بتعويض $dz$ في مفاضلة $F \Leftarrow dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right]=0$

بإخراج $dx\ ,dy$ عامل مشترك نجد:

$$dF=\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{=0}dx+\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}\right)}_{=0}dy=0$$

بالمطابقة بين الطرفين فإن $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

وكذلك $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}=0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

**بعض التعاريف:**

١) المعادلة التفاضلية الجزئية:نسمي كل معادلة تفاضلية تحتوي على مشتق جزئي واحد على الأقل بمعادلة تفاضلية جزئية ونرمز لها ب م.ت.ج

٢) نقول عن الدالة $u(x,y)$ أنها حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية إذا حصلنا على مطابقة للطرفين وذلك بعد التعويض في المعادلة التفاضلية

٣) الحل التام كما درسنا تعريفه سابقاً : هو مجموعة من الدوال المستقلة الاختيارية (لأننا نختار قيمة للثابت $c$ )وعددها يساوي رتبة المعادلة

٤) الحل الخاص: هو الحل الذي ينتج عن الحل العام وذلك بإعطاء الثابت قيمة عددية.

٥) الحل الشاذ: هو الحل الذي لاينتج من الحل العام بإعطاء الثوابت قيمة عددية.

ملاحظة:

*) إن كل حل للمعادلة التفاضلية يمثل سطحاً ندعوه بالسطح التكاملي للمعادلة

ليكن لدينا الدالة $z = z(x,y)$ حيث $G(x,y,z,p,q) = 0$ شكل المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى وإن $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ && $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ وإن $G(x,y,z,p,q,r,St)$ معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية بحيث:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \;\&\&\; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \;\&\&\; S \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

**انتهت المحاضرة**

| | | |
|---|---|---|
| صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/ | مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics | مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧ |

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه