Subject:

Date : / /

(الدكتور علي)

محاضرة ثانية عشرة

بعض خواص المتغيرات العشوائية الطبيعية المستقلة

مبرهنة 9-5: اذا كان لدينا متغيرين عشوائيين طبيعيين $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ فإن $Y = a_1X_1 + a_2X_2 \sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 , a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$

حيث a_1 و a_2 ثوابت حقيقية، يمكن برهان ذلك باستخدام خواص الدالة المولدة للعزوم

- يمكن تعميم هذه المبرهنة من أجل مجموعة من المتغيرات العشوائية الطبيعية المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu_i , \sigma_i^2)$ حيث $1 \le i \le n$ عندئذ سيكون المتغير

$$Y := \sum a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i , \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

مبرهنة 10-5: اذا كان $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة لها نفس المتوسط μ و التباين نفسه σ^2 فإن:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu , n\sigma^2)$$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{بسبب الاستقلال}}{=} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$$

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{بسبب الاستقلال}}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$$

اذ باستخدام المبرهنة السابقة من أجل $a_i = 1$; $1 \le i \le n$

$$Y \sim N\left(\sum a_i\mu_i , \sum a_i^2\sigma_i^2\right) = Y \sim N\left(\sum \mu_i , \sum \sigma_i^2\right)$$

$$= Y \sim N(n\mu , n\sigma^2)$$

مبرهنة 11-5: اذا كان $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة و طبيعية لها نفس المتوسط μ و التباين σ^2 فإن $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma^2}{n}\right)$

يمكننا برهان ذلك باستخدام التعميم من أجل $a_i = \frac{1}{n}$ و $\mu_i = \mu$ و $\sigma_i^2 = \sigma^2$

$$\bar{X} \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i , a_i^2\sigma_i^2\right) = \bar{X} \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\mu_i , \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_i^2\right)$$

$$= \bar{X} \sim N\left(\frac{n}{n}\mu , \frac{n}{n^2}\sigma^2\right) = \bar{X} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

نتيجة من المبرهنة 11-5: بالمعايرة نجد أن $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Subject: Date: / /

مثال: إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين طبيعيين مستقلين وكان $X_1 \sim N(3, 16)$ و $X_2 \sim N(5, 9)$ عندئذ اوجب 1) $P(X_1 < X_2)$

2) $P(3X_1 - 2X_2 > 1)$

الحل:

1) $P(X_1 < X_2) = P(X_1 - X_2 < 0)$

$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2 , \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$X = X_1 - X_2 \sim N(3 - 5 , 16 + 9) \Rightarrow X_1 - X_2 \sim N(-2 , 25)$

$\Rightarrow P(X_1 - X_2 < 0) = P\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} < \frac{0 - (-2)}{5}\right) = P(Z < 0.4)$

$= \phi(0.4) = 0.6554$

2) $P(3X_1 - 2X_2 > 1) = P(Y > 1)$

$Y = 3X_1 - 2X_2 \sim N(3\mu_1 - 2\mu_2 , (3)^2\sigma_1^2 + (-2)^2\sigma_2^2)$

$Y \sim N(3(3) - 2(5) , (9)(16) + (4)(9))$

$\Rightarrow Y \sim N(-1 , 180)$

$\Rightarrow P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{1 - (-1)}{\sqrt{180}}\right)$

$1 - P(Z \leq 0.15) = 1 - \phi(0.15) = 1 - 0.5596 = 0.4404$

مبرهنات النهاية الحدية والتوزيع الطبيعي:

متباينة ماركوف: إذا كان X متغيراً عشوائياً يأخذ قيماً غير سالبة عندئذ من أجل أي عدد $K > 0$ يكون

$P(X \geq K) \leq \frac{E(X)}{K}$

متراجحة تشيبتشيف: إذا كان X متغيراً عشوائياً متوسطه μ وتباينه σ^2 محدود دائماً فإنه من أجل $\varepsilon > 0$ يكون التوقع

$E(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

ملاحظة: تأتي أهمية متراجحتي ماركوف وتشيبتشيف كوننا نستطيع

AL MARJI

Subject:

Date: / /

بواسطتها تحديد حدود الاحتمال لمتغير عشوائي وذلك فقط عند معرفتنا بالمتوسط أو بالمتوسط والتباين معاً دون معرفة التوزيع الاحتمالي

مثال 1: إذا افترضنا أن عدد الأجهزة التي تنتجها شركة سوني كل أسبوعياً هو متغير عشوائي متوسطه 50

1) ماذا يمكنك أن تقول عن احتمال أن يتجاوز عدد الأجهزة المنتجة هذا الأسبوع 75

2) إذا علمنا أن تباين لعدد الأجهزة المنتجة لهذا الأسبوع هو 25 جهاز فماذا تقول عن احتمال أن يكون عدد الأجهزة المنتجة لهذا الأسبوع يقع بين 40 و 60 جهازاً

الحل: نفرض X متغير عشوائي يدل على عدد الأجهزة المنتجة أسبوعياً

1) $P(X>75) \le \frac{E(X)}{75} = \frac{50}{75} \Rightarrow P(X>75) \le \frac{2}{3}$

2) $P(40<X<60) = P(40-50 < X-50 < 60-50)$

$= P(-10 < X-50 < 10) = 1 - P(|X-50| \ge 10)$

باستخدام متراجحة تشيبيشيف يكون

$P(|X-50| \ge 10) \le \frac{25}{(10)^2} = \frac{\sigma^2}{c^2}$

$\Rightarrow P(|X-50| \ge 10) \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1 - P(|X-50| \ge 10) > \frac{3}{4}$

$\Rightarrow P(40 < X < 60) > \frac{3}{4}$

قانون الأعداد الكبيرة:

مبرهنة: إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لها جميعاً التوزيع نفسه بالمتوسط μ والتباين σ^2 محدودين عندئذ من أجل كل $\varepsilon > 0$ يكون احتمال

$$\lim P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Subject: Date: / /

البرهان: يعتمد على متباينة تشيبيشيف

ملاحظة: لقانون الأعداد الكبيرة تطبيقات مهمة في الإحصاء إذا كنا حيال تقدير متوسط التوزيع الذي تتبعه متتالية متغيرات عشوائية وقانون يشير أنه كلما كبرت n (عدد المتغيرات المستقلة) كان

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ أقرب إلى μ

انتهت المحاضرة الثانية عشرة

محاضرة الثالثة عشرة

مبرهنة النهاية المركزية: إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي لها نفس التوزيع μ والتباين σ^2 محدودان بحيث $\sigma^2 \neq 0$ فإن التوزيع المتغير العشوائي يسعى إلى التوزيع الطبيعي المعياري $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ حيث $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

نتائج من المبرهنة:

1) $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

ملاحظة: يمكن تطبيق هذه المبرهنة بتقريب جيد عندما تكون $n > 30$

مثال: إذا $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة ولكل منها التوزيع البواسوني بالوسيط $\lambda = 2$ فإن كان $P(190 < Y_{100} < 210)$ أوجد

$Y_{100} = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$

الحل: $X_i \sim Poiss(\lambda = 2)$; $f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$; $x = 0, 1, \dots$

$\Rightarrow E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$

وبما أن $30 < n = 100$ فيمكن تطبيق مبرهنة ~~[illegible]~~ النهاية المركزية وبالتالي

$Y_{100} \sim N(200, 200)$

AL MARQI

Subject:

Date: / /

$$P(190 < Y_{100} < 210) = P\left(\frac{190-200}{\sqrt{200}} < \frac{Y_{100}-\mu_Y}{\sigma_Y} < \frac{210-200}{\sqrt{200}}\right)$$

$$= P(-0.707 < Z < 0.707)$$

$$= P(Z < 0.707) - P(Z < -0.707)$$

$$= \phi(0.707) - (1 - \phi(0.707)) = 2\phi(0.707) - 1$$

$$= 2(0.76) - 1 = 0.52$$

التقريب التوزيع الثنائي الحدائي للتوزيع الطبيعي:

نعلم أنه إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية برنولية بالوسيط P فإنه سيكون المتغير الحدائي $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

التوزيع الحدائي بالوسيطين P, n:

من أجل n كبيرة كفاية فإنه سيكون لهذا المتغير الجديد التوزيع الطبيعي بالوسيطين $\mu = nP$ و $\sigma = nPq$ بشرط تحقق $nP \geq 5, nq \geq 5$

أي أن X يتبع التوزيع الطبيعي بـ n و P

$$X \sim Bin(n, P) \approx N(nP, nPq)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P\left(x_1 - \frac{1}{2} \leq Y < x_2 + \frac{1}{2}\right)$$

حيث $Y \sim N(nP, npq)$ حيث الـ $\left(\frac{1}{2}\right)$ معامل التصحيح وذلك بسبب الانتقال من التوزيع المنقطع إلى التوزيع المستمر

تمرين: إذا قذفنا قطعة نقود متوازنة 10 مرات فما هو احتمال أن نحصل على الصورة ثلاث مرات أو أربع مرات أو خمس مرات.

الحل: ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على عدد مرات ظهور الصورة فإن لـ X التوزيع الحدائي بالوسيطين $n = 10$ و $P = \frac{1}{2}$ ومنه

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

AL MARJI

Subject: Date : / /

$$C^{10}_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C^{10}_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C^{10}_{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.5683$$

طريقة ثانية: بالملاحظة أن $np = 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5$

$nq = 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5$ يمكن استخدام التقريب الثنائي إلى طبيعي

$$I = P(3 \leq X \leq 5) = P\left(3 - \frac{1}{2} \leq Y \leq 5 + \frac{1}{2}\right)$$

$$; Y \sim N(np, npq) \Rightarrow Y \sim N(5, 2.5)$$

$$I = P\left(\frac{25 - 5}{\sqrt{2.5}} \leq \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} \leq \frac{5.5 + 5}{\sqrt{2.5}}\right)$$

$$P(-1.58 \leq Z \leq 0.316) = \phi(0.316) - \phi(-1.58)$$

$$= 0.6255 - 0.057 = 0.5684$$

نلاحظ أن القيمة الناتجة صحيحة إلى ثلاث أرقام عشرية

على الرغم من أن $n = 10$ فقط

انتهت المحاضرة الثالثة عشرة