حل أسئلة الدروات

أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٦-٢٠١٧) :

السؤال الأول:

١- حدد نوع النقطة العادية والشاذة النظامية والشاذة غير النظامية للمعادلة التفاضلية التالية

$$(3x-5)^5y''+(3x-5)^4y'+(3x-5)^3y=0$$

٢- أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة: $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2=1$

السؤال الثاني: **أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية** $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$
في جوار النقطة $x_0=0$

السؤال الثالث: **باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية** $y''-9y=\sin t$
حيث $t>0$ $\quad y'(0)-3 \;;\; y(0)=1$

السؤال الرابع: **أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{h^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}$
حيث u **محدودة ،** $0<x<3$ $\qquad u(0,t)=u(3,t)=0$

$$U(x,0)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi x+2\sin 10\pi x$$

السؤال الخامس:

أكتب هذه الجملة بالشكل التناظري وأوجد تكاملها العام :

$$(1)\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\qquad,\qquad(2)\ \frac{dz}{dx}=\frac{xz}{y}$$

انتهت الأسئلة ☺

أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٦-٢٠١٧)

السؤال الأول:

١- حدد نوع النقطة العادية والشاذة النظامية والشاذة غير النظامية للمعادلة التفاضلية التالية

$$(3x-5)^5y'' + (3x-5)^4y' + (3x-5)^3y = 0$$

الحل :

نقسم على $(3x-5)^5$

$$\Rightarrow y'' + \frac{1}{(3x-5)}y' + \frac{1}{(3x-5)^2}y = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{(3x-5)} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{(3x-5)^2}$$

نلاحظ بأن جميع النقاط عادية باستثناء النقاط التي تعدم المقام ومنه $3x-5=0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

ومنه $x_0 = \frac{5}{3}$ نقطة شاذة لنحدد اذا كانت نظامية أو غير النظامية

$$P(x) = (x-x_0).p(x)$$

$$= \left(x - \frac{5}{3}\right).\frac{1}{(3x-5)} = 1$$

ومنه $P(x)$ تحليلية عند النقطة $x_0 = \frac{5}{3}$

$$Q(x) = (x-x_0)^2.q(x)$$

$$= \left(x - \frac{5}{3}\right)^2.\frac{1}{(3x-5)^2} = 1$$

ومنه $Q(x)$ تحليلية عند النقطة $x_0 = \frac{5}{3}$

ومنه بمأن $P(x)$ و $Q(x)$ تحليليتان عند النقطة $x_0 = \frac{5}{3}$ ومنه النقطة شاذة نظامية

٢- أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة: $(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 + z^2 = 1$

الحـــــل:

نشتق المعادلة الأساسية بالنسبة لـx: $\quad ;p = \frac{dz}{dx} \quad 2(x-c_1) + 2z.p = 0$

$$\Rightarrow x - c_1 = -zp \;....(1)$$

نشتق المعادلة الأساسية بالنسبة لـ y: $\quad ;q = \frac{dz}{dy} \quad 2(y-c_2) + 2z.q = 0$

$$\Rightarrow y - c_2 = -zq \;....(2)$$

نعوض 1 و 2 في المعادلة الأساسية:

$$(= -zp)^2 + (-zq)^2 + z^2 = 1$$
$$z^2p^2 + z^2q^2 + z^2 = 1$$
$$(p^2 + q^2 + 1)z^2 = 1$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى وهي المعادلة المطلوبة

السؤال الثاني:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية $(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0$ في جوار النقطة $x_0 = 0$

الحـــــل:

$$(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0 \ldots\ldots (*)$$

نقسم المعادلة على $(x^2 - 1)$

$$y'' + \frac{3x}{(x^2 - 1)}y' + \frac{x}{(x^2 - 1)}y = 0$$

ومنه النقطة $x_0 = 0$ نقطة عادية ومنه شكل المتسلسلة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

نشتق :

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

نعوض (y'', y', y) في المعادلة $(*)$

$$(x^2 - 1)\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

نوحد قوى المتسلسلة:

في المتسلسلة 2 نبدل كل n بـ $\mathrm{n} + 2$

في المتسلسلة 4 نبدل كل n بـ $\mathrm{n} - 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = 0$$

نوحد الحدود الدنيا للمتسلسلة

$$-2c_2 - 6c_3x + 3c_1x + c_0x + \sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 3nc_n + c_{n-1}]x^n = 0$$

بالمطابقة نجد:

أمثال الثوابت : $-c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

أمثال x: $(-6c_3 + 3c_1 + c_0)x = 0 \Rightarrow -6c_3 + 3c_1 + c_0 = 0$

$$6c_3 = 3c_1 + c_0$$

$$c_3 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{6}c_0$$

أمثال x^n: $[n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 3nc_n + c_{n-1}]x^n = 0$

$$n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 3nc_n + c_{n-1} = 0$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = n(n-1)c_n + 3nc_n + c_{n-1}$$

$$c_{n+2} = \frac{(n^2+2n)c_n + c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad ; n \geq 2$$

$$n = 2 \Rightarrow c_4 = \frac{8c_2 + c_1}{12} = \frac{c_1}{12}$$

$$n = 3 \Rightarrow c_5 = \frac{15c_3 + c_2}{20} = \frac{3c_3}{4}$$

نعوض قيمة c_3

$$c_5 = \frac{3}{8}c_1 + \frac{1}{8}c_0$$

يكفي إيجاد 5 او 6 حدود إذا لم نجدها تكتب بشكل قانون

ومنه بتعويض في شكل المتسلسلة y

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots. + c_nx^n$$

$$y = c_0 + c_1x + \left(\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{6}c_0\right)x^3 + \frac{c_1}{12}x^4 + \left(\frac{3}{8}c_1 + \frac{1}{8}c_0\right)x^5 + \cdots.$$

وهو الحل العام للمعادلة.

السؤال الثالث:

باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية $y'' - 9y = \sin t$

حيث $t \geq 0$ $y(0) = 1\ ;\ \ y'(0) - 3$

الحـــــل:

نجري تحويلات لابلاس على المعادلة

$$L[y''] - 9L[y] = L[\sin t]$$

$$S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0) - 9Y(s) = \frac{1}{S^2+1}$$

نعوض الشروط: $y(0) = 1\ ;\ \ y'(0) - 3$

$$S^2Y(s) - S + 3 - 9Y(s) = \frac{1}{S^2+1}$$

$$(S^2-9)Y(s) = \frac{1}{S^2+1} + S - 3$$

$$(S^2-9)Y(s) = \frac{S^3 - 3S^2 + S - 3}{S^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{S^3 - 3S^2 + S - 3}{(S^2+1)(S-3)(S+3)} = \frac{A}{S-3} + \frac{B}{S+3} + \frac{CS+D}{S^2+1}$$

نوحد المقامات نجد

$$AS^3 + 3AS^2 + AS + 3A + BS^3 - 3BS^2 + BS - 3B + CS^2 - 9CS + DS^2 - 9D$$
$$= S^3 - 3S^2 + S - 3$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$A + B + C = 1 \ldots\ldots (1)$$
$$3A - 3B + D = -3 \ldots\ldots (2)$$
$$A + B - 9C = 1 \ldots\ldots (3)$$
$$3A - 3B - 9D = -2 \ldots\ldots (4)$$

بطرح 3 من 1 نجد

$$10C = 0 \Rightarrow C = 0$$

بطرح 4 من 2 نجد

$$10D = -1 \Rightarrow D = -\frac{1}{10}$$

من المعادلة 1 نجد

$$A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B$$

نعوض في المعادلة 2 نجد

$$3(1-B) - 3B - \frac{1}{10} = -3$$

$$-6B = -6 + \frac{1}{10} \Rightarrow B = \frac{59}{60}$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{59}{60} \Rightarrow A = \frac{1}{60}$$

بتعويض القيم

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{60}}{S-3} + \frac{\frac{59}{60}}{S+3} + \frac{-\frac{1}{10}}{S^2+1}$$

نجري تحويل لابلاس العكسي

$$L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{60}L^{-1}\left[\frac{1}{S-3}\right] + \frac{59}{60}L^{-1}\left[\frac{1}{S+3}\right] - \frac{1}{10}L^{-1}\left[\frac{1}{S^2+1}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{60}e^{3t} + \frac{59}{60}e^{-3t} - \frac{1}{10}\sin t$$

السؤال الرابع: أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t}$

حيث u محدودة ، $0 < x < 3$ $\quad u(0,t) = u(3,t) = 0$

$$U(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$$

الحـــــل:

$$U = X.T \dots\dots (*)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X'.T \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = X''.T$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X.T'$$

نعوض في المعادلة نجد

$$X''.T = \frac{1}{h^2}X.T'$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{h^2}\frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

وهيي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

$$\xRightarrow{\text{وهي المعادلة المميزة}} \mu^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\mu = \pm i\lambda$$

ومنه الحل العام للمعادلة

$$X = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}\frac{T'}{T} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T} = -h^2.\lambda^2$$

$$\ln(T) = -h^2.\lambda^2 t + c_3'$$

$$T = c_3 . e^{-h^2\lambda^2 t} \qquad ; c_3 = e^{c_3'}$$

نعوض T و X في المعادلة $(*)$

$$U = X.T$$

$$U = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 . e^{-h^2\lambda^2 t})$$

$$U = c_1 c_3 \cos \lambda x . e^{-h^2\lambda^2 t} + c_2 c_3 \sin \lambda x . e^{-h^2\lambda^2 t}$$

$$U = c_4 \cos \lambda x . e^{-h^2\lambda^2 t} + c_5 \sin \lambda x . e^{-h^2\lambda^2 t}$$

الآن لنحسب الثوابت λ و c_4 و c_5 من الشروط الابتدائية:

$$u(0,t) = c_4 . e^{-h^2\lambda^2 t} + 0 = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

من شرط الابتدائي الثاني

$$u(3,t) = \underbrace{c_4 \cos 3\lambda . e^{-h^2\lambda^2 t}}_{\text{0 من الشرط الأول}} + c_5 \sin 3\lambda . e^{-h^2\lambda^2 t} = 0$$

$$\Rightarrow u(3,t) = c_5 \sin 3\lambda . e^{-h^2\lambda^2 t} = 0$$

ومنه إما $c_5 = 0$ مستحيل لأننا لا نريد الحل الصفري

أو $e^{-h^2\lambda^2 t} = 0$ غير ممكن لأنه تابع أسي لا ينعدم

أو $\sin 3\lambda = 0$

$$\Rightarrow \sin 3\lambda = 0 \Rightarrow \sin 3\lambda = \sin n\pi$$

$$3\lambda = n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{3}$$

نعوض

$$u(x,t) = c_5 \sin \frac{n\pi}{3} x . e^{-h^2 \frac{n^2\pi^2}{9} t}$$

حسب مبدأ تركيب الحلول:

$$u(x,t) = c_6 \sin \frac{n_1\pi}{3} x . e^{-h^2 \frac{n_1^2\pi^2}{9} t} + c_7 \sin \frac{n_2\pi}{3} x . e^{-h^2 \frac{n_2^2\pi^2}{9} t} + c_8 \sin \frac{n_3\pi}{3} x . e^{-h^2 \frac{n_3^2\pi^2}{9} t}$$

وبالمطابقة مع الشرط الابتدائي الثالث:

$$u(x,0) = 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x + 2 \sin 10\pi x$$

$$\Longrightarrow u(x,0) = c_6 \sin \frac{n_1\pi}{3} x + c_7 \sin \frac{n_2\pi}{3} x + c_8 \sin \frac{n_3\pi}{3} x$$

بالمطابقة نجد:

$$c_6 = 5 \qquad c_7 = -3 \qquad c_8 = 2$$

$$\frac{n_1\pi}{3} = 4\pi \Longrightarrow n_1 = 12$$

$$\frac{n_2\pi}{3} = 8\pi \Longrightarrow n_2 = 24$$

$$\frac{n_3\pi}{3} = 10\pi \Longrightarrow n_3 = 30$$

ومنه نجد

$$u = 5\sin 4\pi x\,.\,e^{-h^2\frac{(12)^2\pi^2}{9}t} - 3\sin 8\pi x\,.\,e^{-h^2\frac{(24)^2\pi^2}{9}t} + 2\sin 10\pi x\,.\,e^{-h^2\frac{(30)^2\,\pi^2}{9}t}$$

و هو الحل المطلوب .

السؤال الخامس:

أكتب هذه الجملة بالشكل التناظري وأوجد تكاملها العام :

$$(1)\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} \qquad , \qquad (2)\,\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{xz}}{\mathrm{y}}$$

الحـــــــل:

سنردها إلى شكلها النظامي

$$\left.\begin{aligned} 1 &\Rightarrow -\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y} \\ 2 &\Rightarrow \frac{dz}{xz} = \frac{dx}{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{-\frac{dy}{x}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dx}{y}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{xz}}_{(3)}$$

$$1 = 2 \Longrightarrow -\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y}$$

$$y.\,dy + x.\,dx = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_1'$$

$$x^2 + y^2 = c_1 \qquad ; c_1 = 2c_1'$$

$$1 = 3 \Longrightarrow -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{xz}$$

$$\Rightarrow dy = -\frac{dz}{z}$$

$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} y = -\ln z + \ln c_2$$

$$e^y = \frac{c_2}{z} \Longrightarrow c_2 = z.\,e^y$$

$$\Rightarrow F(c_1, c_2) = 0$$

$$F(x^2 + y^2, z.\,e^y) = 0$$

و هو الحل المطلوب

انتهى حل الدورة الفصلية الأولى ☺

أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول:

أوجد الحل العالم للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$

$$x^2y'' - (x+2)y = 0$$

السؤال الثاني :

أوجد السطوح التكاملية للمعادلات التفاضلية التالية :

$$yzp - xzq = e^z$$

السؤال الثالث :

أوجد الحل التام للمعادلة التفاضلية التالية باستخدام طريقة شارب

$$z - pq = 0$$

السؤال الرابع :

باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل مسألة الشروط التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}$$

$$u(x,0) = 0 \quad ; \quad u(t,0) = u(5,t) = 0 \quad : t > 0$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 3\sin(2\pi x) - 2\sin(5\pi x)$$

انتهت الأسئلة ☺

حل أسئلة الدورة الفصلية الأولى (2015 - 2016)

- **السؤال الأول**: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0=0$:

$$x^2y'' - (x+2)y = 0$$

الحل: نلاحظ أن النقطة ($x_0=0$) نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية وذلك بسبب ما يلي:

نقسم طرفي المعادلة التفاضلية على أمثال y'' أي على $x^2\neq 0$

فتصبح المعادلة بالشكل:

$$y'' - \underbrace{\frac{x+2}{x^2}}_{q}\, y = 0$$

نلاحظ أن $p=0$ و $q=\frac{x+2}{x^2}$ وإن الدالة q ليست تحليلية عند النقطة $x_0=0$ لأنها صفر للمقام x^2 وبالتالي فإن x_0 نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية وهي شاذة نظامية لأن الدالة $(x-x_0)^2q = x^2\frac{x+2}{x^2} = x+2$ دالة تحليلية عند النقطة $x_0=0$ (أو لأنها هي شاذة نظامية لأنها صفر من الدرجة الثانية على الأكثر للدالة q).

وبالتالي للمعادلة التفاضلية حل من الشكل:

$$y=(x-x_0)^\lambda\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x-x_0)^n \xRightarrow{x_0=0} y = x^\lambda\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^n$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^{n+\lambda}}$$

نوجد المشتق الثاني لعبارة الحل العام y

$$y'=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda-1} \Rightarrow y''=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n\cdot x^{n+\lambda-2}$$

نعوض قيمة y و y'' في المعادلة المفروضة فنجد:

$$x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n\cdot x^{n+\lambda-2}\right)-(x+2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\cdot x^{n+\lambda}\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n\cdot x^{n+\lambda-2}\right)-x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\cdot x^{n+\lambda}\right)-2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\cdot x^{n+\lambda}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n \cdot x^{n+\lambda}\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot x^{n+\lambda+1}\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot x^{n+\lambda}\right) = 0$$

نوحد قوى المتسلسلات الثلاث بحيث نجعلها كلها $n+\lambda$ ولأجل ذلك نبدل كل n بـ $(n-1)$ في المتسلسلة

فتصبح العلاقة السابقة كما يلي:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n \cdot x^{n+\lambda}\right) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1} x^{n+\lambda}\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot x^{n+\lambda}\right) = 0$$

نوحد الحدود الدنيا للمتسلسلات وذلك لكي نتمكن من جمع هذه المتسلسلات ونلاحظ أن أعلى حد هو $n=1$ نجعل كل المتسلسلات تبدأ من $n=1$ ولأجل ذلك نفك الحد الأول من المتسلسلة الأولى والحد الأول من المتسلسلة الثالثة فنجد:

$$\lambda(\lambda-1)c_0 \cdot x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1). c_n \cdot x^{n+\lambda} - \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1} \cdot x^{n+\lambda} - 2c_0 x^{\lambda} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cdot x^{n+\lambda} = 0$$

بجمع المتسلسلات الثلاث فنجد

$$[\lambda(\lambda-1)c_0 - 2c_0].x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[((n+\lambda)(n+\lambda-1)-2)c_n - c_{n-1}\right] x^{n+\lambda} = 0.$$

وستكون العلاقة الأخيرة محققة فقط عندما كل حد من حدودها يساوي الصفر وبالنسبة للمتسلسلة ستكون مساوية للصفر عندما أمثال $x^{n+\lambda}$ تساوي الصفر

إذاً بمطابقة طرفي المعادلة السابقة نحصل على ما يلي:

$$(\lambda(\lambda-1)c_0 - 2c_0).\ x^{\lambda} = 0$$

$$((n+\lambda)(n+\lambda-1)-2)c_n - c_{n-1} = 0$$

العلاقة الأولى تعطي المعادلة المميزة أما المعادلة الثانية فتعطي العلاقة التكرارية وذلك كما يلي:

$$(\lambda(\lambda-1)-2)c_0 = 0 \xRightarrow{c_0 \neq 0} \lambda(\lambda-1)-2 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) = 2 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

والأخيرة هي المعادلة المميزة وحلولها $(\lambda_1 = 2), (\lambda_2 = -1)$

أما العلاقة التكرارية فتكون هي:

$$[(n+\lambda)(n+\lambda-1)-2]c_n - c_{n-1} = 0 \Rightarrow [(n+\lambda)(n+\lambda-1)-2]c_n = c_{n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = \frac{c_{n-1}}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)-2} \quad ; n \geq 1}$$

لإيجاد الحل الخاص الأول نعوض في العلاقة التكرارية كل λ بـ $\lambda_1 = 2$ (نعوض الجذر الأكبر و $\lambda_1 > \lambda_2$)

نجد:

$$C_n = \frac{C_{n-1}}{(n+2)(n+1)-2} \Rightarrow \left(C_n = \frac{C_{n-1}}{n(n+3)} \quad ; n \geq 1\right)$$

$$(n=1) \Rightarrow C_1 = \frac{C_0}{(1)(4)} = \frac{C_0}{4} = \frac{3!\, C_0}{1!\,(1+3)!}$$

$$(n=2) \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{2(5)} = \frac{C_0}{(5)(4)(2)} = \frac{C_0}{40} = \frac{3!\, C_0}{2!\,(2+3)!}$$

$$(n=3) \Rightarrow C_3 = \frac{C_2}{(3)(6)} = \frac{C_0}{(6)(5)(4)(3)(2)} = \frac{C_0}{720} = \frac{3!\, C_0}{3!\,(3+3)!}$$

$$(n=4) \Rightarrow C_4 = \frac{C_3}{(4)(7)} = \frac{C_0}{(7)(6)(5)(4)(4)(3)(2)} = \frac{C_0}{20160} = \frac{3!\, C_0}{4!\,(4+3)!}$$

وهكذا نجد أن العلاقة التكرارية تعطى بالشكل:

$$C_n = \frac{3!\, C_0}{n!\,(n+3)!} \quad ; n \geq 1$$

وبالتالي الحل الخاص الأول هو: $Y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3!\, C_0}{n!\,(n+3)!} x^{n+2}$

وللسهولة نضع $C_0 = 1$ فيصبح شكل الحل الخاص:

$$\boxed{Y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3!}{n!\,(n+3)!} x^{n+2}}$$

نلاحظ الآن أن $\lambda_1 - \lambda_2 = 3 \in \mathbb{Z}$ أي الفرق بين الجذرين عدد صحيح وبالتالي الحل الخاص الثاني له الشكل: $Y_2 = |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n \cdot x^n + a Y_1 \cdot \ln|x|$

حيث Y_1 هو الحل الخاص الأول و $c_0 \neq 0$ و a ثابت اختياري يمكن أن يكون صفر)

وبالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية المدروسة هو: $Y = A Y_1 + B Y_2$

<u>ملاحظة</u>: في الحالة التي يكون فيها $\lambda_2 - \lambda_1$ عدد صحيح (أو في حالة $\lambda_1 = \lambda_2$ أي جذر مضاعف للمعادلة المميزة) فإننا فقط نكتب شكل الحل الخاص الثاني ولا ندخل بتفاصيل حسابه

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية التالية

$$y z p - x z q = e^z$$

<u>الحل</u>: هذه معادلة لاغرانج التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير المتجانسة

والجملة الملحقة (المساعدة) هي:

$$\underset{(1)}{\frac{dx}{yz}} = \underset{(2)}{\frac{dy}{-xz}} = \underset{(3)}{\frac{dz}{e^z}}$$

نوجد الآن التكاملين الأوليين، نلاحظ أن:

$$(1)=(2) \Rightarrow \frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} \Rightarrow y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 + x^2 = 2c.$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 + x^2 = c_1 \quad : c_1 = 2c}$$

وهو التكامل الأولي الأول.

لإيجاد التكامل الأولي الثاني نلاحظ أن:

$$(1) = (3) \Rightarrow \frac{dx}{yz} = \frac{dz}{e^z} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{z\,dz}{e^z}$$

من التكامل الأولي الأول لدينا:

$$y^2 + x^2 = c_1 \Rightarrow y = \sqrt{c_1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \frac{z\,dz}{e^z} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \underbrace{\int \frac{z\,dz}{e^z}}_{I} \quad \ldots\ldots (*)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)$$

$$I = \int \frac{z\,dz}{e^z} = \int z e^{-z}\,dz$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = z \Rightarrow du = dz$$

$$dv = e^{-z}\,dz \Rightarrow v = -e^{-z}$$

$$\Rightarrow I = -z e^{-z} + \int e^{-z}\,dz = -z e^{-z} - e^{-z} + c_2 = -(z+1)e^{-z} + c_2$$

نعوض في العلاقة $(*)$ نجد:

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right) = -(z+1)e^{-z} + c_2 \Rightarrow c_2 = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right) + (z+1)e^{-z}.$$

$$\xrightarrow[y^2+x^2=c_1]{} \boxed{c_2 = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}\right) + (z+1)e^{-z}}$$

وهو التكامل الأولي الثاني

وبالتالي السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية هو $F(u,v) = 0$ حيث أن:

$$u = c_1(x,y,z) \quad , \quad v = c_2(x,y,z)$$

$$\boxed{F\left(y^2 + x^2, \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}\right) + (z+1)e^{-z}\right) = 0}$$

- $\boxed{\text{السؤال الثالث}}$ (20 درجة)

أوجد الحل التام للمعادلة التفاضلية التالية باستخدام طريقة شاربي:

$$z - p \cdot q = 0.$$

الحل: هذه معادلة تفاضلية جزئية غير خطية ومتجانسة من الشكل $F(x,y,z,p,q)=0$ لإيجاد الحل التام لها بطريقة شارب نقوم بما يلي:

نوجد المشتقات الجزئية $\frac{\partial F}{\partial z}=1$ ، $\frac{\partial F}{\partial q}=-p$ ، $\frac{\partial F}{\partial p}=-q$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

الجملة المميزة (المساعدة) هي:

$$\boxed{\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{-dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

نعوض المشتقات التي حصلنا عليها في الجملة المميزة السابقة فنجد

$$\underset{(1)}{\frac{dx}{-q}}=\underset{(2)}{\frac{dy}{-p}}=\underset{(3)}{\frac{dz}{-pq-qp}}=\underset{(4)}{\frac{-dp}{p}}=\underset{(5)}{\frac{-dq}{q}}$$

$(4)=(5) \Rightarrow -\frac{dp}{p}=-\frac{dq}{q} \Rightarrow \ln|p|=\ln|q|+\ln|a|=\ln|q.a| \Rightarrow$

$$\boxed{p=q.a} \quad \dots \star$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$z-(q.a).q=0 \Rightarrow z-aq^2=0 \Rightarrow z=a.q^2 \Rightarrow \boxed{q=\sqrt{\frac{z}{a}}}$$

نعوض قيمة q الأخيرة في العلاقة ($\star$) فنجد

$$p=a.\sqrt{\frac{z}{a}}=a.\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a}} \Rightarrow p=\sqrt{a}.\sqrt{z}=\sqrt{a.z} \Rightarrow \boxed{p=\sqrt{a.z}}$$

نعوض قيمتي p, q في المعادلة التفاضلية الكلية التالية:

$$dz=p.dx+q\,dy$$

$$\Rightarrow dz=\sqrt{a.z}\,dx+\sqrt{\frac{z}{a}}\,dy \Rightarrow dz=\sqrt{a}.\sqrt{z}\,dx+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{z}\,dy \xrightarrow{\div\sqrt{z}}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}}=\sqrt{a}\,dx+\frac{1}{\sqrt{a}}\,dy \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} 2\sqrt{z}=\sqrt{a}\,x+\frac{y}{\sqrt{a}}+b \xrightarrow{\text{بالتربيع}}$$

$$4z=\left(\sqrt{a}.x+\frac{y}{\sqrt{a}}+b\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a}\cdot x + \frac{y}{\sqrt{a}} + b\right)^2}$$

وهو الحل التام للمعادلة التفاضلية المعطاة والحل العام لها هو:

$$z = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a}\, x + \frac{y}{\sqrt{a}} + \psi(a)\right)^2$$

حيث $b=\psi(a)$ دالة اختيارية.

- السؤال الرابع (30 درجة)

باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{4\partial t^2}$$

$$u(x,0)=0 \quad , \quad u(0,t)=u(5,t) \quad ; \quad t>0$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 3\sin 2\pi x - 2\sin 5\pi x$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي المعادلة بالنسبة للمتغير t فنجد

$$L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = L\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \frac{1}{4}L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] \Rightarrow$$

$$U''(x,s) = \frac{1}{4}\left[s^2 U(x,s) - s\,u(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right]$$

وحسب الشروط الابتدائية المعطاة لدينا:

$$u(x,0)=0 \quad , \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 3\sin 2\pi x - 2\sin 5\pi x$$

نعوض فنجد:

$$U''(x,s) = \frac{1}{4}\left[s^2 U(x,s) - s(0) - (3\sin 2\pi x - 2\sin 5\pi x)\right]$$

$$\Rightarrow 4U''(x,s) = s^2 \cdot U(x,s) - 3\sin 2\pi x + 2\sin 5\pi x$$

$$\Rightarrow 4U''(x,s) - s^2\cdot U(x,s) = -3\sin 2\pi x + 2\sin 5\pi x \quad \ldots (1)$$

والأخيرة هي معادلة تفاضلية غير متجانسة من المرتبة الثانية بأمثال ثابتة.

الحل العام لها هو: (الحل العام للمعادلة المتجانسة + الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة)

نوجد أولاً الحل العام للمعادلة المتجانسة (دون طرف ثاني) الموافقة للمعادلة السابقة:

$$4U''(x,s) - s^2 U(x,s) = 0 \quad \dots \quad (2)$$

هذه المعادلة تقبل مجموعة حلول خاصة من الشكل: $(U = e^{\lambda x})$ بالاشتقاق مرتين ثم التعويض في (2) نجد:

$$U' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$$

$$U'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \Rightarrow (4\lambda^2 - s^2) e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - s^2 = 0$$

والعلاقة الأخيرة هي المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية وبحلها نجد:

$$4\lambda^2 = s^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{s^2}{4} \Rightarrow \left(\lambda_{1,2} = \mp \frac{s}{2}\right)$$

وهما جذران حقيقيان مختلفان وبالتالي الحل العام للمعادلة المتجانسة من الشكل

$$U_1 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow \boxed{U_1 = c_1 e^{\frac{s}{2}x} + c_2 e^{-\frac{s}{2}x}}$$

لنوجد الآن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (مع طرف ثاني) وهو سيكون من الشكل

$$U_2 = A \sin 2\pi x + B \sin 5\pi x$$

نشتق عبارة الحل السابقة مرتين ثم نعوض في المعادلة (1)

$$U_2' = 2\pi A \cos 2\pi x + 5\pi B \cos 5\pi x$$

$$U_2'' = -4\pi^2 A \sin 2\pi x - 25\pi^2 B \sin 5\pi x.$$

$$\Rightarrow 4(-4\pi^2 A \sin 2\pi x - 25\pi^2 B \sin 5\pi x) - s^2 (A \cdot \sin 2\pi x + B \sin 5\pi x)$$

$$= -3 \sin 2\pi x + 2 \sin 5\pi x.$$

$$\Rightarrow -16\pi^2 A \sin 2\pi x - 100\pi^2 B \sin 5\pi x - s^2 A \cdot \sin 2\pi x - s^2 B \sin 5\pi x$$

$$= -3 \sin 2\pi x + 2 \sin 5\pi x.$$

$$\underline{-A(16\pi^2 + s^2) \sin 2\pi x} - \underline{B(100\pi^2 + s^2) \sin 5\pi x} = \underline{-3 \sin 2\pi x} + \underline{2 \sin 5\pi x}$$

وبالمطابقة بين طرفي المعادلة السابقة نجد

$$\left(A = \frac{3}{s^2 + 16\pi^2}\right) \quad , \quad \left(B = -\frac{2}{s^2 + 100\pi^2}\right)$$

نعوض قيم A, B في عبارة الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة فيكون هذا الحل هو:

$$\boxed{U_2 = \frac{3}{s^2 + 16\pi^2} \sin 2\pi x - \frac{2}{s^2 + 100\pi^2} \sin 5\pi x}$$

أخيراً الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (1) هو

$$U = U_1 + U_2 \Rightarrow \left(U = c_1 e^{\frac{s}{2}x} + c_2 e^{-\frac{s}{2}x} + \frac{3}{s^2+16\pi^2}\sin 2\pi x - \frac{2}{s^2+100\pi^2}\sin 5\pi x\right)$$

نقوم الآن بحساب الثوابت c_1, c_2 وذلك من خلال شروط البدء المعطاة في نص المسألة:

$$U(0,t) = 0 \Rightarrow U(0,s) = \int_0^\infty u(0,t)e^{-st}dt = \int_0^\infty 0 \cdot dt = 0$$

نعوض $(x=0)$ في الحل العام فنجد:

$$U(0,s) = c_1 + c_2 + 0 + 0 = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow (c_1 = -c_2)$$

$$U(5,t) = 0 \Rightarrow U(5,s) = \int_0^\infty u(5,t).e^{-st}dt = \int_0^\infty 0 . dt = 0$$

نعوض $(x=5)$ في الحل العام فنجد

$$U(5,s) = c_1 . e^{5\frac{s}{2}} + c_2 . e^{-5\frac{s}{2}} + 0 + 0 = c_1 e^{5\frac{s}{2}} + c_2 . e^{-5\frac{s}{2}} = 0$$

ولكن لدينا $(c_1 = -c_2)$ وبالتالي:

$$c_1 e^{5\frac{s}{2}} - c_1 e^{-5\frac{s}{2}} = 0 \Rightarrow c_1\left(e^{5\frac{s}{2}} - e^{-5\frac{s}{2}}\right) = 0$$

والعلاقة الأخيرة محققة فقط عندما $c_1 = 0$ وذلك لأن $s > 0$ حسب شروط البدء وبالتالي

$$\boxed{c_1 = 0} \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

ومنه الحل العام هو:

$$\boxed{U = \frac{3}{s^2+16\pi^2} . \sin 2\pi x - \frac{2}{s^2+100\pi^2}\sin 5\pi x}$$

نأخذ الآن تحويل لابلاس العكسي للطرفين بالنسبة لـ t فنجد

$$L^{-1}[U] = L^{-1}\left[\frac{3}{s^2+16\pi^2}\sin 2\pi x - \frac{2}{s^2+100\pi^2}\sin 5\pi x\right]$$

وبما أن تحويل لابلاس العكسي خطي تصبح العبارة السابقة بالشكل

$$L^{-1}[U] = 3L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+16\pi^2}\right]\sin 2\pi x - 2L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+100\pi^2}\right]\sin 5\pi x$$

لنتمكن من إيجاد تحويلي لابلاس العكسيين السابقين نقوم بما يلي:

نضرب ونقسم الحد الأول من الطرف الأيمن على 4π ونضرب ونقسم الحد الثاني من الطرف الأيمن على 10π فنجد: (ندخل كل من 4π و 10π إلى داخل تحويل لابلاس العكسي لأنه خطي كما نعلم)

أسئلة الدورة التكميلية (٢٠١٤-٢٠١٥) :

السؤال الأول :

أوجد الحل العالم للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$

$$2x^2y'' + (x - x^2)y' - y = 0$$

السؤال الثاني :

باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية :

$$y'' + 2y' + y = e^{-2t}$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad : \quad t > 0$$

السؤال الثالث :

أوجد السطوح التكاملية للمعادلات التفاضلية التالية :

$$xy^3p + x^2z^2q = y^3z$$

السؤال الرابع :

أوجد السطح المتعامد مع أسرء السطوح المعينة بـ:

$$3(x + y) = c(3z + 1)$$

والمار بالدائرة المعينة بالمعادلتين

$$x^2 + y^2 = 1 \quad , z = 1$$

السؤال الخامس :

أوجد الحل العام للجملة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}$$

انتهت الأسئلة ☺

حل أسئلة الدورة الفصلية الإضافية (2014 - 2015)

السؤال الأول (30 درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$:

$$2x^2y'' + (x - x^2)y' - y = 0.$$

الحل: لاحظ $x_0 = 0$ نقطة شاذة نظامية لأنّ

$$2x^2y'' + (x-x^2)y' - y = y'' + \left(\frac{x-x^2}{2x^2}\right)y' - \frac{1}{2x^2}y = 0$$

$x.p(x)$ دالة تحليلية عند النقطة $x_0 = 0$:

$$\Rightarrow x.p(x) = x.\left(\frac{x-x^2}{2x^2}\right) = \frac{1-x}{2}$$

$x^2.q(x)$ دالة تحليلية عند النقطة $x_0 = 0$ لأنّ:

$$\Rightarrow x^2.q(x) = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda-1}$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda-2}$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أنّ:

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda-1} - x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda} = 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}2(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda+1}}_{1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda} = 0$$

نبدل كل n بـ $n-1$ وذلك في السلسلة (1)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}2(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+\lambda-1)a_{n-1}x^{n+\lambda} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda} = 0.$$

$$\Rightarrow 2\lambda(\lambda-1)a_0x^{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda}+\lambda a_0 x^{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+\lambda-1)a_{n-1}x^{n+\lambda}-a_0x^{\lambda}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda}=0$$

بتجميع الحدود نجد أنَّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+n+\lambda-1\right)a_n-(n+\lambda-1)a_{n-1}\right]x^{n-\lambda}+\left(2\lambda(\lambda-1)+\lambda-1\right)a_0x^{\lambda}=0$$

بالمطابقة مع الطرف الثاني نجد أنَّ

$$(2\lambda(\lambda-1)+\lambda-1)a_0=0\quad\begin{cases}a_0\neq 0 & \text{شروط الحل}\\ 2\lambda^2-\lambda-1=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{cases}$$

$$a_n=\frac{(n+\lambda-1)a_{n-1}}{2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda-1)}=\frac{(n+\lambda-1)a_{n-1}}{(n+\lambda-1)(2n+2\lambda+1)}$$

$$a_n=\frac{a_{(n-1)}}{2n+2\lambda+1}\quad;\quad n\geq 1$$

من أجل $\lambda_1=1$ نجد أنَّ

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{2n+3}\quad;\quad n\geq 1$$

$$\begin{cases}n=1\Rightarrow a_1=\frac{a_0}{5}\\ n=2\Rightarrow a_2=\frac{a_1}{7}=\frac{a_0}{5\times 7}\\ n=3\Rightarrow a_3=\frac{a_2}{9}=\frac{a_0}{5\times 7\times 9}\\ n=4\Rightarrow a_4=\frac{a_3}{11}=\frac{a_0}{5\times 7\times 9\times 11}\end{cases}$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{(n+1)}=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots$$

$$y_1=a_0\left(x+\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5\times 7}x^3+\frac{1}{5\times 7\times 9}x^4+\cdots\right)$$

وبما أنَّ $\lambda_1-\lambda_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ليس كعدد صحيح فإنَّ:

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-\frac{1}{2}}\qquad a_n=\frac{a_{n-1}}{2n}$$

$$\begin{cases}n=1\Rightarrow a_1=\frac{a_0}{2}\\ n=2\Rightarrow a_2=\frac{a_1}{4}=\frac{a_0}{2\times 4}\\ n=3\Rightarrow a_3=\frac{a_2}{6}=\frac{a_0}{2\times 4\times 6}\end{cases}$$

$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{8} = \frac{a_0}{2\times4\times6\times8}$

$$Y_2 = a_0 \cdot x^{-(\frac{1}{2})} + a_1 \cdot x^{\frac{1}{2}} + a_2 \cdot x^{\frac{3}{2}} + a_3 \cdot x^{\frac{5}{2}} + \dots$$

$$Y_2 = a_0\left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\times4} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2\times4\times6} \cdot x^{\frac{7}{2}} + \dots\right)$$

والحل العام للمعادلة المعطاة هو: $Y = Y_1 + Y_2$

- $\boxed{\text{السؤال الثاني}}$ (15 درجة)

باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل مسألة الشروط الابتدائية التالية:

$$y'' + 2y' + y = e^{-2t}$$

حيث $t>0$ وحيث $y(0) = y'(0) = 0$

الحل: محلول في دورة 2015 الفصل الثاني.

- $\boxed{\text{السؤال الثالث}}$ (15 درجة)

أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية التالية:

$$xy^3 p + x^2 z^2 q = y^3 z$$

الحل: الجملة المساعدة للمعادلة التفاضلية السابقة هي:

$$\underbrace{\frac{dx}{xy^3}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dy}{x^2 z^2}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dz}{y^3 z}}_{(3)}$$

$$1 \text{ و } 3 \Rightarrow \frac{dx}{xy^3} = \frac{dz}{y^3 z} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

بمكاملة الطرفين نجد أن:

$$\ln(x) + \ln(c_1) = \ln(z) \Rightarrow \ln(x \cdot c_1) = \ln(z)$$

$$\Rightarrow z = x \cdot c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{z}{x}$$

نلاحظ أنه لا يمكن الحصول على نسبة أخرى منفصلة المتحولات من النسب السابقة لذلك نعوض $x = z$ في الجملة المساعدة فنجد:

$$\underbrace{\frac{dX}{xy^3}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dY}{x^2(X.c_1)^2}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dZ}{y^3(X.c_1)}}_{(3)}$$

1 و 2 $\Rightarrow \frac{dX}{xy^3} = \frac{dY}{x^2(X.c_1)^2} \Rightarrow \frac{dY}{Xy^3} = \frac{dY}{c_1^2 \cdot x^4} \Rightarrow c_1^2 x^3 dX = y^3 dY$

مكاملة الطرفين:

$$\frac{c_1^2}{4} x^4 + c_2' = \frac{1}{4} y^4 \Rightarrow c_1^2 \cdot x^4 + c_2 = y^4 \Rightarrow c_2 = y^4 - c_1^2 x^4$$

$$\Rightarrow c_2 = y^4 - z^2 \cdot x^2$$

الحل العام (السطح التكاملي) هو:

$$\Rightarrow F(c_1, c_2) = F\left(\frac{z}{x}, y^4 - z^2 \cdot x^2\right) = 0$$

- السؤال الرابع (20 درجة)

أوجد السطح المتعامد مع أسرة السطوح المعينة بـ: $z(x+y) = c(3z+1)$

والمار بالدائرة المعينة بالمعادلتين z ، $x^2+y^2=1$

الحل: $\phi(x,y,z) = \frac{z(x+y)}{3z+1} = c$

أي أن الثابت c يمثل تابع لـ x, y, z عندئذٍ تكون الجملة الملحقة هي:

$$\frac{dX}{\frac{\partial\phi}{\partial x}} = \frac{dY}{\frac{\partial\phi}{\partial y}} = \frac{dZ}{\frac{\partial\phi}{\partial z}} \Rightarrow \underbrace{\frac{dX}{\frac{z}{3z+1}}}_{(1)} = \underbrace{\frac{dY}{\frac{z}{3z+1}}}_{(2)} = \underbrace{\frac{dZ}{\frac{x+y}{(3z+1)^2}}}_{(3)}$$

1 و 2 $\Rightarrow \frac{dX}{\frac{z}{3z+1}} = \frac{dY}{\frac{z}{3z+1}} \Rightarrow dX = dY \Rightarrow x + c_1 = y \Rightarrow \boxed{c_1 = y - x}$

إيجاد الثابت c_2:

نضرب ونقسم النسبة الأولى بـ x ، نضرب ونقسم النسبة الثانية بـ y ، نضرب ونقسم النسبة الثالثة بـ $-z(3z+1)$

بجمع النسب الثلاث السابقة نجد:

$$\Rightarrow \frac{xdX + ydY - z(3z+1)dZ}{0} = 0 \Rightarrow xdX + ydY - z(3z+1)dZ = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^3 - \frac{z^2}{2} = c_2' \Rightarrow \boxed{c_2 = x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2}$$

* طريقة أخرى لإيجاد C_2 وهي:

$$(1+2) \text{ و } (3) \Rightarrow \frac{dx+dy}{\frac{2z}{3z+1}} = \frac{dz}{\frac{x+y}{(3z+1)^2}} \Rightarrow (x+y).\,d(x+y) = 2z(3z+1)\,dz$$

نضع $t = x+y \Leftarrow$

$$t.\,dt = (6z^2+2z)\,dz$$

بالمكاملة:

$$\frac{t^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2} = 2z^3+z^2+c_2'$$

$$\Rightarrow C_2 = x^2+y^2-4z^3-2z^2+2xy$$

إيجاد السطح المتعامد: نلاحظ أنه لا يمكن إيجاد السطح المتعامد من العلاقة

$$C_2 = x^2+y^2+2xy-4z^3-2z^2$$

لأننا لا نعلم قيمة $x.y$ ويمكن إيجاده من العلاقة

$$C_2 = x^2+y^2-2z^3-z^2$$

نعوض $x^2+y^2=1$ ، $z=1$ فنجد:

$$C_2 = -1-2+1 = -2$$

وهو السطح المتعامد لأسرة السطوح المعطاة.

- السؤال الخامس (20 درجة)

أوجد الحل العام للجملة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = 1-\frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}$$

الحل: نوجد حل الجملة:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1-\frac{1}{z} \Rightarrow dy = dx - \frac{dx}{z} \Rightarrow dy-dx = -\frac{dz}{z} \quad \cdots (*) \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x} \Rightarrow dz = \frac{dx}{y-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d(y-x)}{y-x} = -\frac{dx}{z(y-x)} \\ -\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{z(y-x)} \end{cases} \Rightarrow \frac{d(y-x)}{(y-x)} = -\frac{dz}{z}$$

بالمكاملة للطرفين نجد أن:

$$\ln(y-x) = -\ln(z) + \ln(c_1) \Rightarrow \ln(y-x) = \ln\left(\frac{c_1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow c_1 = z(y-x) \Rightarrow z = \frac{c_1}{y-x}$$

$$dy - dx = -\frac{dx}{z} = -\frac{dx}{\frac{c_1}{y-x}}$$

نعوض z في (*) فنجد أن:

$$\Rightarrow \frac{dy-dx}{y-x} = -\frac{dx}{c_1} \Rightarrow \ln(y-x) = -\frac{x}{c_1} + c_2' \Rightarrow y - x = c_2 e^{-\frac{x}{c_1}}$$

$$\Rightarrow c_2 = (y-x)\, e^{\frac{x}{c_1}} \Rightarrow c_2 = (y-x)\, e^{\frac{x}{z(y-x)}}$$