حل أسئلة الدروات

أسئلة الدورة التكميلية (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول : عرف المصطلحات التالية : النقطة الداخلية – نقطة التجمع – النقطة الملاصقة – المجموعة الكثيفة – تابع المسافة .

السؤال الثاني :

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقة و ليكن C صف المجموعات المؤلف من المجموعة الخالية و كل المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$ التي متمماتها منتهية ، أثبت أن C تشكل طوبولوجيا على $\mathbb{R}$

السؤال الثالث : إذا كانت $X = \{a, b, c, d, e\}$ و كانت $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ و كانت $A = \{b, c, d, e\}$ أوجد $A', \bar{A}, A^{\circ}$

السؤال الرابع : أوجد المجموعات التالية في الطوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$

$$1)\ \left(]2,5[\right)^{\circ} \quad , \quad \left(]2,5[\right)' \quad , \quad \overline{\left(]2,5[\right)}$$

$$2)\ \left(\{1,23\}\right)^{\circ} \quad , \quad \left(\{1,23\}\right)' \quad , \quad \overline{\left(\{1,23\}\right)}$$

$$3)\ \left(\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\dots\right\}\right)'$$

السؤال الخامس : برهن ما يلي :

١- كل متتالية متقاربة في فضاء متري تكون محدودة

٢- كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مغلقة

السؤال السادس : أثبت أنت كلاً من التابعين التاليين هو تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$:

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2;$$
$$d_1(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2|$$
$$d_2(z_1, z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

و أوجد الكرة المفتوحة $N_{d_2}\left((0,0), 1\right)$

انتهت الأسئلة ☺

حل أسئلة الدورة التكميلية (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول : عرف المصطلحات التالية : النقطة الداخلية – نقطة التجمع – النقطة الملاصقة – المجموعة الكثيفة – تابع المسافة .

الحل :

النقطة الداخلية : ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي و $A \subseteq X$ ، نقول عن $x \in A$ إنها نقطة داخلية في A إذا وجدت مجموعة مفتوحة في (X,τ) تحوي x محتواة في A أي أن :

(x نقطة داخلية في A) $\Leftrightarrow x \in B \subseteq A \; : \; \exists B \in \tau$ و نرمز لمجموعة النقاط الداخلية في A بالرمز A° .

النقطة الحدية (نقطة التجمع) : ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي و لتكن $A \subseteq X$ نقول عن $x \in X$ إنها نقطة حدية (نقطة تجمع) لـ A إذا كانت كل مجموعة مفتوحة في X و تحوي x تحوي نقطة واحدة على الأقل من المجموعة $A \setminus \{x\}$ أي إذا و فقط إذا تحقق الشرط :

$\forall B \in \tau : \; x \in B \Rightarrow B \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ و نرمز بـ A' لمجموعة نقاط التجمع لـ A

النقطة الملاصقة : ليكن (X,τ) فضاءً طوبولوجياً و $A \subseteq X$ نعرف لصاقة المجموعة A بأنها تقاطع المجموعات المغلقة التي تحوي A و نرمز لها بـ $\bar{A}$ (تدعى لصاقة مجموعة ببعض المراجع **غُلاقة مجموعة**) و ندعو كل نقطة من لصاقة المجموعة A بنقطة ملاصقة لـ A أي أن :

x ملاصقة لـ$A \Rightarrow x \in \bar{A}$

المجموعة الكثيفة : ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي و أيضاً $A,B \subseteq X$ بحيث $A \subseteq B$ نقول عن A إنها كثيفة في B إذا تحقق أنه $B \subseteq \bar{A}$

و نقول عن A إنها كثيفة في X إذا تحقق $\bar{A} = X$

تابع المسافة : لتكن X مجموعة غير خالية و ندعو التابع d المعرف بالشكل التالي:

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$

بأنه **تابع مسافة** على X إذا تحقق ما يلي :

$1 - \forall x, y \in X\ ; d(x,y) \geq 0$
$2 - \forall x, y \in X : d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$3 - \forall x, y \in X\ ; d(x,y) = d(y,x)$
$4 - \forall x, y, z \in X\ ; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

السؤال الثاني : لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقة و ليكن C صف المجموعات المؤلف من المجموعة الخالية و كل المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$ التي متمماتها منتهية ، أثبت أن C تشكل طوبولوجيا على $\mathbb{R}$

الحل :

لدينا $C = \{\emptyset\} \cup \{A : A \subseteq \mathbb{R}\ ,$ منتهية $A^c\}$ و $\mathbb{R}$ مجموعة غير منتهية :

١- $\emptyset \in C$ فرضاً
و أيضاً $X \in C$ لأن متممتها $\mathbb{R}^{\,c} = \emptyset$ مجموعة منتهية
٢- ليكن $A, B \in C$ و لنميز حالتين :
- إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن $A \cap B \in C$
- إذا كان $A \cap B \neq \emptyset$ ، فبما أن $A, B \in C$ يكون كل من A^c, B^c مجموعة منتهية و أنّ:

$$(A \cap B)^c = \underbrace{A^c \cup B^c}_{\text{اجتماع منتهيتين هو منتهية}} \Rightarrow A \cap B \in C$$

٣- علينا إثبات أنه إذا كان A_i حيث $i \in I$ جماعة من عناصر C فإن $\bigcup_{i \in I} A_i \in C$ و أيضاً سنميز حالتين :
-إذا كان $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ فإن $\bigcup_{i \in I} A_i \in C$
-إذا كان $\bigcup_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ فإنه يوجد $i_0 \in I$ بحيث $A_{i_0} \neq \emptyset$ (و هي عنصر من C) إذاً متممتها مجموعة منتهية :

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \subseteq A_{i_0}^c \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in C$$

مما سبق نجد أنها تشكل طوبولوجيا على $\mathbb{R}$.

السؤال الثالث :

إذا كانت $X = \{a, b, c, d, e\}$ و كانت $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ و كانت $A = \{b, c, d, e\}$ أوجد $A', \bar{A}, A^{\circ}$

الحل :

إيجاد A' : نقول عن $x \in X$ إنها نقطة **حدية** (نقطة تجمع) لـ A إذا و فقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall B \in \tau : \ x \in B \Rightarrow B \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

- $\boldsymbol{x = a}$ إن المجموعات المفتوحة التي تحوي a هي $X, \{a\}, \{a, b, c\}$:

$$X \cap (A \setminus \{a\}) = X \cap (\{b, c, d, e\} \setminus \{a\}) = X \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c, d, e\} \neq \emptyset$$
$$\{a\} \cap (A \setminus \{a\}) = \{a\} \cap \{b, c, d, e\} = \emptyset$$

إذاً a ليست حدية لأنه وجد مجموعة مفتوحة لا تحقق الشرط .

- $\boldsymbol{x = b}$ ، إن المجموعات المفتوحة التي تحوي b هي $X, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

$$X \cap (A \setminus \{b\}) = X \cap \{c, d, e\} = \{c, d, e\} \neq \emptyset$$
$$\{b, c\} \cap (A \setminus \{b\}) = \{b, c\} \cap \{c, d, e\} = \{c\} \neq \emptyset$$
$$\{a, b, c\} \cap (A \setminus \{b\}) = \{a, b, c\} \cap \{c, d, e\} = \{c\} \neq \emptyset$$

تحقق الشرط من أجل أي مجموعة مفتوحة تحوي b ، و بالتالي $b \in A'$

- $\boldsymbol{x = c}$ ، إن المجموعات المفتوحة التي تحوي النقطة c هي $X, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

$$X \cap (A \setminus \{c\}) = \{b, d, e\} \neq \emptyset$$
$$\{b, c\} \cap (A \setminus \{c\}) = \{b, c\} \cap \{b, d, e\} = \{b\} \neq \emptyset$$

إذاً c حدية

- $\boldsymbol{x = d}$ ، المجموعات المفتوحة التي تحوي d هي X فقط و نجد أن:

$$X \cap (A \setminus \{d\}) = \{b, c, e\} \neq \emptyset$$

إذاً d حدية أي $d \in A'$

- $\boldsymbol{x = e}$ ، المجموعات المفتوحة التي تحوي e هي X:

$$X \cap (A \setminus \{e\}) = \{b, c, d\} \neq \emptyset$$

إذاً $e \in A'$ و بالتالي و مما سبق نجد أن :

$$\boxed{A' = \{b, c, d, e\} = A}$$

إيجاد A° : نقول عن $x \in A$ إنها نقطة **داخلية** في A إذا وجدت مجموعة مفتوحة في (X, τ) تحوي x محتواة في A أي أن :

- $\boldsymbol{x = b}$ ، يوجد مجموعة مفتوحة $\{b, c\}$ بحيث $b \in \{b, c\} \subseteq A$ و بالتالي $b \in A^\circ$
- $\boldsymbol{x = c}$ ، يوجد مجموعة مفتوحة $\{b, c\}$ بحيث $c \in \{b, c\} \subseteq A$ و بالتالي $c \in A^\circ$
- $\boldsymbol{x = d}$ ، المجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحوي d هي X و هي غير محتواة في A إذاً:

$$\nexists B \in \tau : d \in B \subseteq A \Rightarrow d \notin A^\circ$$

- $\boldsymbol{x = e}$، المجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحوي e هي X و هي غير محتواة في A إذاً:

$$\nexists B \in \tau : e \in B \subseteq A \Rightarrow e \notin A^\circ$$

و بالتالي $\boxed{A^\circ = \{b,c\}}$

◈ إيجاد $\bar{A}$: لصاقة المجموعة A بأنها تقاطع المجموعات المغلقة التي تحوي A :

لنوجد أولاً المجموعات المغلقة (متممات المجموعات المفتوحة) :

$$X, \emptyset, \{b,c,d,e\}, \{a,d,e\}, \{d,e\}$$

و من ثم ، إن المجموعات المغلقة التي تحوي A هي $A = \{b,c,d,e\}$, X و بالتالي :

$$\bar{A} = X \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\} = A \Longrightarrow \boxed{\bar{A} = \{b,c,d,e\} = A}$$

السؤال الرابع : أوجد المجموعات التالية في الطوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$

1) $(]2,5[)^\circ$, $(]2,5[)'$, $\overline{(]2,5[)}$

2) $(\{1,2,3\})^\circ$, $(\{1,2,3\})'$, $\overline{(\{1,2,3\})}$

3) $\left(\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots\right\}\right)'$

الحل :

١- لنرمز بـ $A =]2,5[$ عندئذٍ :

❖ نلاحظ أن A مجموعة مفتوحة و هذا يكافئ أن $A = A^\circ$

"كلَ مجموعةٍ مفتوحةٍ تساوي داخلها ولما كان كلُ مجال مفتوح في $\mathbb{R}$ مجموعةً مفتوحةً فإنَّ:"

إذاً $\boxed{(]2,5[)^\circ =]2,5[}$

❖ تراكم مجال مفتوح في $\mathbb{R}$ هو إغلاقه : أي $\boxed{A' = (]2,5[)' = [2,5]}$

❖ لصاقة A: نعلم حسب مبرهنة سابقة أن $\bar{A} = A \cup A'$ و بالتالي :

$$\boxed{\bar{A} = \overline{]2,5[} =]2,5[\cup [2,5] = [2,5]}$$

٢- لنرمز بـ $B = \{1,2,3\}$:

❖ بما أن المجموعة B منتهية فكل من داخلها و تراكمها يكون خالياً أي :

$\boxed{B^\circ = \emptyset}$, $\boxed{B' = \emptyset}$

❖ نعلم حسب مبرهنة سابقة أن كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مغلقة و بالتالي B مغلقة ، و نعلم حسب نص سابق أيضاً أن كل مغلقة تساوي لصاقتها و بالتالي :

$$\boxed{\bar{B} = B}$$

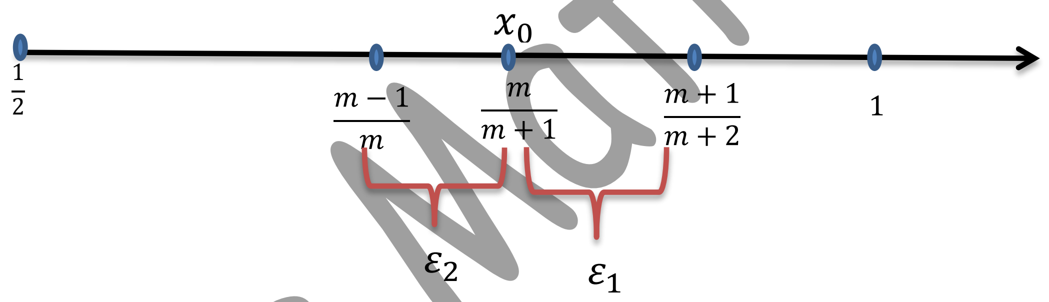
٣- لنرمز بـ $D = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$

إن $D' = \{1\}$ أي أن نقطة التجمع الوحيدة للمجموعة D هي x=1 ذلك لأنه و حسب تعريف النقطة الحدية يكون $\forall B \in \tau : 1 \in B \,;\, B \cap \{D \setminus \{1\}\} \neq \emptyset$ (هذا يعني أن أي جوار للنقطة 1 سيتقاطع مع المجموعة في نقاط مغايرة لـ 1) و هذا محقق بسبب ما يلي :

إن D ما هي إلا مجموعة قيم المتتالية العددية الحقيقية غير المنتهية $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 2}$ و التي بدورها متقاربة من $x = 1$ و حسب تعريف تقارب متتالية في R فإن قولنا عن المتتالية $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 2}$ إنها متقاربة من $x = 1$ فهذا يكافئ أن أي جوار للنقطة $x = 1$ سيحوي جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها أي أن التقاطع المذكور أعلاه لن يكون خالٍ .

بقي أن نثبت أنها نقطة التجمع الوحيدة ، لتكن $x_0 \neq 1$، عندئذٍ :

☒ $x_0 \in D$ و بالتالي يوجد $m \in \mathbb{N}$ بحيث $x_0 = \frac{m}{m+1}$ و لنلاحظ على مستقيم الأعداد ما يلي :



من السهل التبين من أن $d\left(\frac{m-1}{m}, \frac{m}{m+1}\right) = \varepsilon_2 < d\left(\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m+2}\right) = \varepsilon_1$ و ذلك كما يلي :

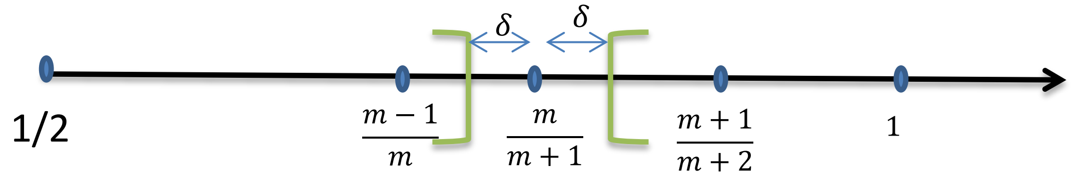
$$\varepsilon_1 = d\left(\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m+2}\right) = \left|\frac{m}{m+1} - \frac{m+1}{m+2}\right| = \frac{1}{(m+2)(m+1)}$$

$$\varepsilon_2 = d\left(\frac{m-1}{m}, \frac{m}{m+1}\right) = \left|\frac{m-1}{m} - \frac{m}{m+1}\right| = \frac{1}{m(m+1)}$$

و لما كان $m < m+2$ فإن $(m+1)m < (m+1)(m+2)$ و بقلب الطرفين :

$$\frac{1}{(m+2)(m+1)} < \frac{1}{m(m+1)} \Leftrightarrow \varepsilon_1 < \varepsilon_2$$

الآن لنأخذ جواراً I للنقطة $x_0 = \frac{m}{m+1}$ نصف قطره $\delta = \frac{\varepsilon_1}{2}$ الموضح في الرسم:



فنلاحظ أن I لا يحوي نقاطاً من المجموعة D إلا x_0 و بالتالي :أصبح بإمكاننا أن نقول ما يلي :

$$\exists I =]\, x_0 - \delta, x_0 + \delta[: x_0 \in I \,, D \cap (I \setminus \{x_0\}) = \emptyset$$

و بالتالي $x_0 = \frac{m}{m+1}$ ليست تجمع .

☒ أما من أجل $1 \neq x_0 \notin D$ فأيضاً سنميز حالتين :

◄ $x_0 > 1$ أو $x_0 < \frac{2}{3}$ فإنه و بسهولة يمكن إيجاد مجال مفتوح مركزه x_0 (مجموعة مفتوحة تحوي النقطة) بحيث لا يتقاطع مع D بأي نقطة حيث نختار :

$$r = \frac{1}{2}\min\left\{ d\left(x_0, \frac{1}{2}\right), d(x_0, 1)\right\}$$

فيكون $]x_0 - r, x_0 + r[\cap (D \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ و بالتالي x_0 ليست تجمع لـ D أيضاً .

◄ $\frac{2}{3} < x_0 \neq \frac{m}{m+1} < 1$ عندئذٍ x_0 يقع بين عنصرين من عناصر المجموعة D أي أنه يوجد عددان طبيعيان i, j بحيث $i < j$ و أن $\frac{i}{1+i} < x_0 < \frac{j}{1+j}$ و بالتالي نختار $r = \frac{1}{2}\min\left\{ d\left(x_0, \frac{i}{i+1}\right), d\left(x_0, \frac{j}{j+1}\right)\right\}$ نصف قطر للجوار $M =]x_0 - r, x_0 + r[$

فيصبح لدينا $M \cap \{D \setminus \{x_0\}\} = \emptyset$ بالتالي x_0 ليست تجمع لـ D أيضاً .

إذاً نقطة التجمع الوحيدة لـ D هي النقطة 1 أي أن $\boxed{D' = \{1\}}$

السؤال الخامس: برهن ما يلي :

١- كل متتالية متقاربة في فضاء متري تكون محدودة

البرهان : بفرض أن $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة من $a \in X$ و هذا يكافئ :

$$\forall \varepsilon > 0 \,; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

و لنبرهن على وجود $M > 0$ يحقق أن : $\forall n, m \in \mathbb{N} : d(a_n, a_m) < M$

لنأخذ مثلاً $\varepsilon = 1$ فنجد أن :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < 1$$

ليكن $n, m \in \mathbb{N}$ و لنميز الحالات التالية :

أ- إذا كان $n, m \geq n_0$ عندها يكون : $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a_m, a) < 1 + 1 = 2$

ب-إذا كان $n,m < n_0$ عندها نأخذ $L = \max\{d(a_i,a_j) : 1 \le i,j < n_0\}$ فيكون :

$$d(a_n,a_m) \le \mathrm{L}$$

ت-إذا كان $n < n_0$, $m \ge n_0$ عندئذٍ يكون :

$$d(a_n,a_m) \le d(a_n,n_0) + d(a_{n_0},a_m) \le L+1$$

و لنختار عدد يناسب جميع الحالات السابقة فنأخذ $0 < M = L+2$ فيكون :

$$d(a_n,a_m) < \mathrm{M} \quad ,\forall n,m \in \mathbb{N}$$

٢- كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مغلقة

البرهان :

ليكن (X,d) فضاءً مترياً و $a \in X$ و لنثبت أن $\{a\}$ مجموعة مغلقة ، أي لنثبت أن متممتها $A = X \setminus \{a\}$ هي مجموعة مفتوحة ..

و من أجل ذلك يجب إثبات أنه :

$$\forall x \in A; \exists r > 0 : N_d(x,r) \subseteq A$$

لدينا $x \in A = X \setminus \{a\}$ و بالتالي $x \neq a$ و هذا يبين أن $r = d(x,a) \gneqq 0$

و أنّ: $a \notin N_d(x,r)$ لأنه لو كان $a \in N_d(x,r)$ لكان $\underbrace{d(x,a)}_{=r} < r$ و هذا تناقض و بالتالي نجد أن :

$$\mathrm{N_d}(x,r) \subseteq X \setminus \{a\} = A$$

و هذا يبين أن المجموعة $\mathrm{A} = X \setminus \{a\}$ مفتوحة ، و بالتال متممتها مجموعة مغلقة أي أن المجموعة $\{a\}$ مجموعة مغلقة

الآن ، إن أي مجموعة منتهية مثل $F = \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصرها (كمجموعات وحيدة العنصر) أي:

$$\mathrm{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}$$

و حسب نص سابق ، إن الاجتماع المنتهي لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة ، و يتم بذلك المطلوب .

السؤال السادس : أثبت أن كلاً من التابعين التاليين هو تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$:

$$\forall z_1=(x_1,y_1), z_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2;$$
$$d_1(z_1,z_2)=|x_1-x_2|+3|y_1-y_2|$$
$$d_2(z_1,z_2)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$$

و أوجد الكرة المفتوحة $N_{d_2}((0,0),1)$

الحل :

- **من أجل d_1 :**

حتى تكون دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

$$\forall z_1=(x_1,y_1), z_2=(x_2,y_2), z_3=(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2;$$

◄الشرط الأول :(غير سالب)

$d(z_1,z_2)=|x_1-x_2|+3|y_1-y_2|\geq 0$ و ذلك حسب تعريف دالة القيمة المطلقة

◄الشرط الثاني : $d(z_1,z_2)=0 \Leftrightarrow |x_1-x_2|+3|y_1-y_2|=0$

و لكن إذا كان مجموع مقادير غير سالبة هو الصفر فإن كل من هذه المقادير معدوم أي :

$$\begin{cases}|x_1-x_2|=0\Leftrightarrow x_1=x_2\\ 3|y_1-y_2|=0\Leftrightarrow y_1=y_2\end{cases}\Longrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Longrightarrow z_1=z_2$$

◄الشرط الثالث :(التناظر)

$$d(z_1,z_2)=|x_1-x_2|+3|y_1-y_2|=|x_2-x_1|+3|y_2-y_1|=d(z_2,z_1)$$

◄الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) :

$$d(z_1,z_3)=|x_1-x_3|+3|y_1-y_3|$$
$$=|x_1-\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_2}-x_3|+3|y_1-\boldsymbol{y_2}+\boldsymbol{y_2}-y_3|$$
$$\underset{\text{خواص قيمة مطلقة}}{\leq}\ |x_1-x_2|+|x_2-x_3|+3|y_1-y_2|+3|y_2-y_3|$$

$\boldsymbol{d(z_1,z_2)}$ $\quad$ $\boldsymbol{d(z_2,z_3)}$

و هذا يبين أن : $d(z_1,z_3)\leq d(z_1,z_2)+d(z_2,z_3)$

> ملاحظة : قد تأتي دالة المسافة هذه أو ما يشبهها فكل مسافة من الشكل
> $d(z_1,z_2)=|x_1-x_2|+\alpha\,|y_1-y_2|$
> مهما كان العدد α تبقى الطريقة نفسها فقط نستبدل كل 3 بـ α
> **و ستجد ذلك في دورة الفصل الأول**

من تحقق الشروط الأربعة نجد أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$

- **من أجل d_2 :**

حتى تكون دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 \;;$$

◄ **الشرط الأول :(غير سالب)**

$$d_2(z_1, z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \geq 0$$

القيمة العظمى لمقادير غير سالبة هو مقدار غير سالب

◄ **الشرط الثاني :**

$$d_2(z_1, z_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

و لكن إذا كانت القيمة العظمى لمقادير غير سالبة هو الصفر فإن كل من هذه المقادير معدوم أي :

$$\begin{cases} |x_1 - x_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \\ |y_1 - y_2| = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

◄ **الشرط الثالث :(التناظر)**

$$d_2(z_1, z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$
$$= d_2(z_2, z_1)$$

◄ **الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) :** علينا إثبات أن : $d_2(z_1, z_3) \leq d_2(z_1, z_2) + d_2(z_2, z_3)$

لدينا :

$$d_2(z_1, z_3) = \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\}$$

و لنفرض أن $\max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} = |x_1 - x_3|$ (و هذا لا يؤثر على عمومية المسألة)

إذن :

$$d_2(z_1, z_3) = |x_1 - x_3|$$
$$= |x_1 - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_2} - x_3| \leq \underbrace{|x_1 - x_2|}_{\leq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}} + \underbrace{|x_2 - x_3|}_{\leq \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}}$$
$$\leq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\} = d_2(z_1, z_2) + d_2(z_2, z_3)$$

فهو تابع مسافة

- **نوجد الكرة المفتوحة $N_{d_2}((0,0),1)$:**

$$N_{d_2}((0,0),1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\max\{|x|,|y|\}<1\}$$

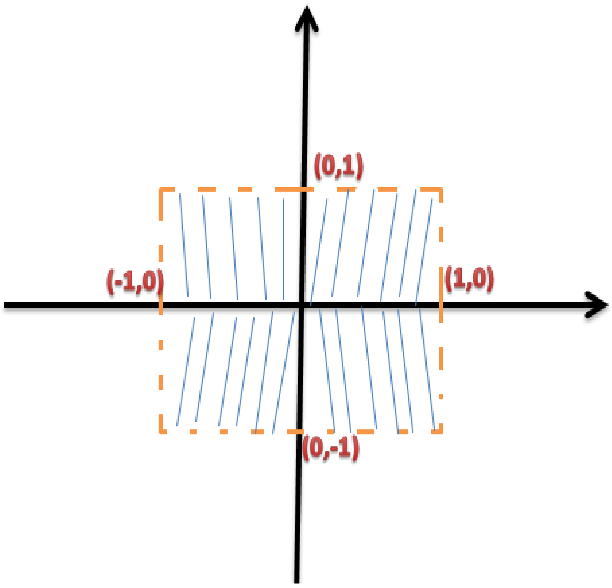
إن $\max\{|x|,|y|\}$ هو القيمة العظمى للعددين $|x|$ و $|y|$ و حسب ما سبق فإنه إذا كانت هذه القيمة العظمى أصغر من الواحد فلا بد أن كل من العددين أصغر من الواحد ،إذن :

$$N_{d_2}((0,0),1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|<1,|y|<1\}$$

و حسب خواص القيمة المطلقة نكتب :

$$N_{d_2}((0,0),1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-1<x<1,-1<y<1\}$$

و هي مجموعة الثنائيات التي كل من مسقطيها يقع بين العددين *1-* و *1* ، و بالرسم يكون



انتهت الدورة التكميلية ☺

أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٥-٢٠١٦)

السؤال الأول :

عرف المصطلحات التالية في الفضاء الطوبولوجي (X,τ) :

النقطة الداخلية – نقطة التجمع – النقطة الملاصقة – المجموعة الكثيفة – المجموعة التامة

السؤال الثاني :

لتكن X مجموعة غير منتهية و لتكن τ مؤلفة من المجموعة الخالية و كل المجموعات الجزئية في X التي متمماتها منتهية ، أثبت أن (X,τ) فضاء طوبولوجي

السؤال الثالث : إذا كانت $X=\{1,2,3,4,5\}$ و كان $\tau=\{\emptyset,X,\{1\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ و $A=\{2,3,4,5\}$ المطلوب : أوجد $A',\overline{A},A^{\circ}ext(A)$

السؤال الرابع :

أوجد المجموعات التالية في الطوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$

$$1)\ \ (]2,5[)^{\circ}\quad,\quad(]2,5[)'\quad,\quad\overline{(]2,5[)}$$
$$2)\ \ (\{1,23\})^{\circ}\quad,\quad(\{1,23\})'\quad,\quad\overline{(\{1,23\})}$$
$$3)\ \ \left(\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\}\right)'$$

السؤال الخامس : برهن ما يلي :

١- كل متتالية متقاربة في فضاء متري تكون محدودة

٢- كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مغلقة

٣- ليكن الفضاء الطوبولوجي (X,τ) و لتكن $A\subseteq X$ عندئذٍ فإن $A\cup A'$ مغلقة في (X,τ)

السؤال السادس : أثبت أنت كلاً من التابعين التاليين هو تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$:

$$\forall z_1=(x_1,y_1),z_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2;$$
$$d_1(z_1,z_2)=|x_1-x_2|+3|y_1-y_2|$$
$$d_2(z_1,z_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

انتهت الأسئلة ☺

حل أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٥-٢٠١٦)

السؤال الأول : عرف المصطلحات التالية في الفضاء الطوبولوجي (X,τ) :

النقطة الداخلية – نقطة التجمع – النقطة الملاصقة – المجموعة الكثيفة – المجموعة التامة

الحل :

النقطة الداخلية : ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي و $A \subseteq X$ ، نقول عن $x \in A$ إنها نقطة داخلية في A إذا وجدت مجموعة مفتوحة في (X,τ) تحوي x محتواة في A أي أن :

x) نقطة داخلية في A) $\Leftrightarrow \exists B \in \tau \ : x \in B \subseteq A$ و نرمز لمجموعة النقاط الداخلية في A بالرمز A° .

النقطة الحدية (نقطة التجمع) : ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي و لتكن $A \subseteq X$ نقول عن $x \in X$ إنها نقطة حدية (نقطة تجمع) لـ A إذا كانت كل مجموعة مفتوحة في X و تحوي x تحوي نقطة واحدة على الأقل من المجموعة $A \setminus \{x\}$ أي إذا و فقط إذا تحقق الشرط : $\forall B \in \tau : \ x \in B \Rightarrow B \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ و نرمز بـ A' لمجموعة نقاط التجمع لـ A

النقطة الملاصقة : ليكن (X,τ) فضاءً طوبولوجياً و $A \subseteq X$ نعرف لصاقة المجموعة A بأنها تقاطع المجموعات المغلقة التي تحوي A و نرمز لها بـ $\bar{A}$ (تدعى لصاقة مجموعة ببعض المراجع **غُلاقة مجموعة**) و ندعو كل نقطة من لصاقة المجموعة A بنقطة ملاصقة لـ A أي أن :

$x \in \bar{A} \Rightarrow$ x ملاصقة لـA

المجموعة الكثيفة : ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي و أيضاً $A,B \subseteq X$ بحيث $A \subseteq B$ نقول عن A إنها كثيفة في B إذا تحقق أنه $B \subseteq \bar{A}$

و نقول عن A إنها كثيفة في X إذا تحقق $\bar{A} = X$

المجموعة التامة : ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي و لتكن $A \subseteq X$ نقول عن A إنها تامة إذا كانت كل متتالية كوشية من عناصر A متقاربة فيها .

السؤال الثاني : لتكن X مجموعة غير منتهية و لتكن τ مؤلفة من المجموعة الخالية و كل المجموعات الجزئية في X التي متمماتها منتهية ، أثبت أن (X,τ) فضاء طوبولوجي

الحل :

لدينا $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A : A \subseteq X , \text{منتهية } A^c\}$

١- $\emptyset \in \tau$ فرضاً

و أيضاً $X \in \tau$ لأن متممتها $X^c = \emptyset$ مجموعة منتهية

٢- ليكن $A, B \in \tau$ و لنميز حالتين :

- إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن $A \cap B \in \tau$
- إذا كان $A \cap B \neq \emptyset$ ، فبما أن $A, B \in \tau$ يكون كل من A^c, B^c مجموعة منتهية و أنّ:

$$(A \cap B)^c = \underbrace{A^c \cup B^c}_{\text{اجتماع منتهيتين هو منتهية}} \Longrightarrow A \cap B \in \tau$$

٣- علينا إثبات أنه إذا كان A_i حيث $i \in I$ جماعة من عناصر τ فإن $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ وأيضاً سنميز حالتين :

- إذا كان $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$ فإن $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$
- إذا كان $\bigcup_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ فإنه يوجد $i_0 \in I$ بحيث $A_{i_0} \neq \emptyset$ (و هي عنصر من τ) إذاً متممتها مجموعة منتهية :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \subseteq A_{i_0}^c \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$$

السؤال الثالث : إذا كانت $X = \{1,2,3,4,5\}$ و كان $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ و $A = \{2,3,4,5\}$ المطلوب : أوجد $A', \bar{A}, \overset{\circ}{A}, ext(A)$

الحل:

لنوجد A':

- $x = 1$ إن المجموعات المفتوحة التي تحوي 1 هي $X, \{1\}, \{1,2,3\}$:

$$X \cap (A \setminus \{1\}) = X \cap (\{2,3,4,5\} \setminus \{1\}) = X \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3,4,5\} \neq \emptyset$$

$$\{1\} \cap (A \setminus \{1\}) = \{1\} \cap \{2,3,4,5\} = \emptyset$$

إذاً 1 ليست حدية لأنه وجد مجموعة مفتوحة لا تحقق الشرط .

- $x = 2$ ، إن المجموعات المفتوحة التي تحوي٢ هي $X, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

$X \cap (A \setminus \{2\}) = X \cap \{3,4,5\} = \{3,4,5\} \neq \emptyset$

$\{2,3\} \cap (A \setminus \{2\}) = \{2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\} \neq \emptyset$

$\{1,2,3\} \cap (A \setminus \{2\}) = \{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{c3\} \neq \emptyset$

تحقق الشرط من أجل أي مجموعة مفتوحة تحوي 2 ، و بالتالي $2 \in A'$

- $x = 3$ ، إن المجموعات المفتوحة التي تحوي النقطة3 هي $X, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

$X \cap (A \setminus \{3\}) = \{2,3,4\} \neq \emptyset$

$\{2,3\} \cap (A \setminus \{3\}) = \{2,3\} \cap \{2,4,5\} = \{2\} \neq \emptyset$

إذاً 3 حدية

- $x = 4$ ، المجموعات المفتوحة التي تحوي d هي فقط X و نجد أن:

$X \cap (A \setminus \{4\}) = \{2,3,5\} \neq \emptyset$

إذاً 4حدية أي $4 \in A'$

- $x = 5$ ، المجموعات المفتوحة التي تحوي e هي X:

$X \cap (A \setminus \{5\}) = \{2,3,4\} \neq \emptyset$

إذاً $5 \in A'$ و بالتالي و مما سبق نجد أن :

$A' = \{2,3,4,5\}$

إيجاد A° : نقول عن $x \in A$ إنها نقطة **داخلية** في A إذا وجدت مجموعة مفتوحة في (X, τ) تحوي x محتواة في A أي أن :

- $\boldsymbol{x = 2}$ ، يوجد مجموعة مفتوحة $\{2,3\}$ بحيث $2 \in \{2,3\} \subseteq A$ و بالتالي $2 \in A^\circ$
- $\boldsymbol{x = 3}$ ، يوجد مجموعة مفتوحة $\{2,3\}$ بحيث $3 \in \{2,3\} \subseteq A$ و بالتالي $3 \in A^\circ$
- $\boldsymbol{x = 4}$ ، المجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحوي 4 هي X و هي غير محتواة في A إذاً:

$\nexists B \in \tau : 4 \in B \subseteq A \Rightarrow 4 \notin A^\circ$

- $\boldsymbol{x = 5}$ ،المجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحوي 5 هي X و هي غير محتواة في A إذاً:

$\nexists B \in \tau : 5 \in B \subseteq A \Rightarrow 5 \notin A^\circ$

و بالتالي $\boxed{A^\circ = \{2,3\}}$

إيجاد $\bar{A}$: لصاقة المجموعة A بأنها تقاطع المجموعات المغلقة التي تحوي A :

لنوجد أولاً المجموعات المغلقة (متممات المجموعات المفتوحة) :

$X, \emptyset, \{2,3,4,5\}, \{1,4,5\}, \{4,5\}$

و من ثم ، إن المجموعات المغلقة التي تحوي A هي $A = \{2,3,4,5\}$, X و بالتالي :

$$\bar{A} = X \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3,4,5\} = A \Longrightarrow \boxed{\bar{A} = \{2,3,4,5\} = A}$$

إيجاد ext(A): نعلم أن خارج المجموعة A أي $ext(A)$ هو مجموعة النقاط التي تقع داخل متممة A أي أن :

$$ext(A) = (A^c)^\circ = (\bar{A})^c$$

$$\Longrightarrow ext(A) = (\bar{A})^c = \{2,3,4,5\}^\circ = \{1\} \Longrightarrow \boxed{ext(A) = \{1\}}$$

السؤال الرابع : أوجد المجموعات التالية في الطوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$

$$1)\ \ (]2,5[)^\circ \quad , \quad (]2,5[)' \quad , \quad \overline{(]2,5[)}$$

$$2)\ \ (\{1,23\})^\circ \quad , \quad (\{1,23\})' \quad , \quad \overline{(\{1,23\})}$$

$$3)\ \ \left(\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\ldots\ldots\right\}\right)'$$

الحل :

◄لنرمز بـ $A =]2,5[$ عندئذٍ :

❖ نلاحظ أن A مجموعة مفتوحة و هذا يكافئ أن $A = A^\circ$ "كلَ مجموعةٍ مفتوحةٍ تساوي داخلها ولما كان كلُ مجال مفتوح في $\mathbb{R}$ مجموعةً مفتوحةً فإنَّ":

إذاً $\boxed{(]2,5[)^\circ =]2,5[}$

❖ تراكم مجال مفتوح في $\mathbb{R}$ هو إغلاقه : أي $\boxed{A' = (]2,5[)' = [2,5]}$

❖ لصاقة A: نعلم حسب مبرهنة سابقة أن $\bar{A} = A \cup A'$ و بالتالي :

$$\boxed{\bar{A} = \overline{]2,5[} =]2,5[\cup [2,5] = [2,5]}$$

◄لنرمز بـ $B = \{1,2,3\}$:

❖ بما أن المجموعة B منتهية فكل من داخلها و تراكمها يكون خالياً أي :

$$\boxed{B^\circ = \emptyset}, \quad \boxed{B' = \emptyset}$$

❖ نعلم حسب مبرهنة سابقة أن كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مغلقة و بالتالي B مغلقة ، و نعلم حسب نص سابق أيضاً أن كل مغلقة تساوي لصاقتها و بالتالي :

$$\boxed{\bar{B} = B}$$

◀لنرمز بـ $D=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\right\}$

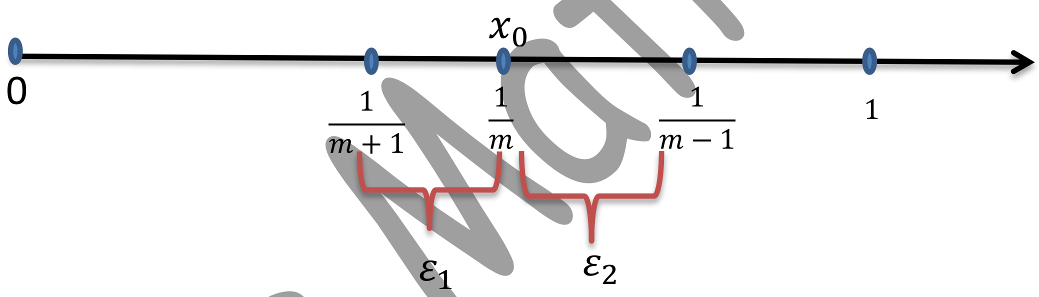
إن $D'=\{0\}$ أي أن نقطة التجمع الوحيدة للمجموعة D هي x=0 ذلك لأنه و حسب تعريف النقطة الحدية يكون $\forall B\in\tau : 1\in B\,;\, B\cap\{D\setminus\{0\}\}\neq\emptyset$) هذا يعني أن أي جوار للنقطة 0 سيتقاطع مع المجموعة في نقاط مغايرة لـ 0) و هذا محقق بسبب ما يلي :

إن D ما هي إلا مجموعة قيم المتتالية العددية الحقيقية غير المنتهية $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ و التي بدورها متقاربة من $x=0$ و حسب تعريف تقارب متتالية في R فإن قولنا عن المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ إنها متقاربة من $x=0$ فهذا يكافئ أن أي جوار للنقطة $x=0$ سيحوي جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها

أي أن التقاطع المذكور أعلاه لن يكون خالٍ فهو يحوي جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها

بقي أن نثبت أنها نقطة التجمع الوحيدة ، لتكن $x_0\neq 0$، عندئذٍ لنميز حالتين :

☒ $x_0\in D$ و بالتالي يوجد $m\in\mathbb{N}$ بحيث $x_0=\frac{1}{m}$ و لنلاحظ على مستقيم الأعداد ما يلي :



من السهل التبين من أن $d\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}\right)=\varepsilon_1<d\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m-1}\right)=\varepsilon_2$ و ذلك كما يلي :

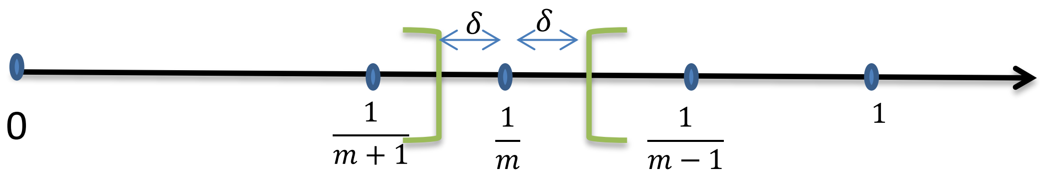
$$\varepsilon_1=d\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}\right)=\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{m(m+1)}$$

$$\varepsilon_2=d\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m-1}\right)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{m-1}\right|=\frac{1}{m(m-1)}$$

و لما كان $m-1<m+1$ فإن $m(m-1)<m(m+1)$ و بقلب الطرفين :

$$\frac{1}{m(m+1)}<\frac{1}{m(m-1)}\Leftrightarrow\varepsilon_1<\varepsilon_2$$

الآن لنأخذ جواراً I للنقطة $x_0=\frac{1}{m}$ نصف قطره $\delta=\frac{\varepsilon_1}{2}$ الموضح في الرسم:



فنلاحظ أن I لا يحوي نقاطاً من المجموعة D إلا x_0 و بالتالي :أصبح بإمكاننا أن نقول ما يلي :

$$\exists I =]\,x_0 - \delta, x_0 + \delta[: x_0 \in I \,, D \cap (I \setminus \{x_0\}) = \emptyset$$

و بالتالي $x_0 = \frac{1}{m}$ ليست تجمع .

☒ أما من أجل $x_0 \notin D$ $0 \neq$ فأيضاً سنميز الحالتين :

◄ $x_0 > 1$ أو $x_0 < 0$ فإنه و بسهولة يمكن إيجاد مجال مفتوح مركزه x_0 (مجموعة مفتوحة تحوي النقطة) بحيث لا يتقاطع مع D بأي نقطة حيث نختار :

$$r = \frac{1}{2}\min\{\, d(x_0,1), d(x_0,0)\}$$

فيكون $]x_0 - r, x_0 + r[\cap (D \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ و بالتالي x_0 ليست تجمع لـ D أيضاً .

◄ $0 < x_0 \neq \frac{1}{m} < 1$ عندئذٍ x_0 يقع بين عنصرين من عناصر المجموعة D أي أنه يوجد عددان طبيعيان i, j بحيث $j < i$ و أن $\frac{1}{i} < x_0 < \frac{1}{j}$ و بالتالي نختار $r = \frac{1}{2}\min\left\{d\left(x_0,\frac{1}{i}\right), d\left(x_0,\frac{1}{j}\right)\right\}$ نصف قطر للجوار $M =]x_0 - r, x_0 + r[$ فيصبح لدينا $M \cap \{D \setminus \{x_0\}\} = \emptyset$ بالتالي x_0 ليست تجمع لـ D أيضاً .

إذاً نقطة التجمع الوحيدة لـ D هي النقطة 0 أي أن $\boxed{D' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}' = \{0\}}$

السؤل الخامس : برهن ما يلي :

١- كل متتالية متقاربة في فضاء متري تكون محدودة

البرهان : بفرض أن $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة من $a \in X$ و هذا يكافئ :

$$\forall \varepsilon > 0 \,; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

و لنبرهن على وجود $M > 0$ يحقق أن : $\forall n, m \in \mathbb{N} : d(a_n, a_m) < M$

لنأخذ مثلاً $\varepsilon = 1$ فنجد أن :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < 1$$

ليكن $n, m \in \mathbb{N}$ و لنميز الحالات التالية :

أ- إذا كان $n, m \geq n_0$ عندها يكون : $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a_m, a) < 1 + 1 = 2$

ب-إذا كان $n, m < n_0$ عندها نأخذ $L = \max\{d(a_i, a_j) : 1 \le i, j < n_0\}$ فيكون :

$$d(a_n, a_m) \le \mathrm{L}$$

ت-إذا كان $n < n_0$, $m \ge n_0$ عندئذٍ يكون :

$$d(a_n, a_m) \le d(a_n, n_0) + d(a_{n_0}, a_m) \le L + 1$$

و لنختار عدد يناسب جميع الحالات السابقة فنأخذ $0 < M = L + 2$ فيكون :

$$d(a_n, a_m) < \mathrm{M} \quad , \forall n, m \in \mathbb{N}$$

٢- كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مغلقة

البرهان :

ليكن (X, d) فضاءً مترياً و $a \in X$ و لنثبت أن $\{a\}$ مجموعة مغلقة ، أي لنثبت أن متممتها $A = X \setminus \{a\}$ هي مجموعة مفتوحة ..

و من أجل ذلك يجب إثبات أنه :

$$\forall x \in A; \exists r > 0 : N_d(x, r) \subseteq A$$

لدينا $x \in A = X \setminus \{a\}$ و بالتالي $x \neq a$ و هذا يبين أن $r = d(x, a) \gneqq 0$

و أنّ: $a \notin N_d(x, r)$ لأنه لو كان $a \in N_d(x, r)$ لكان $\underbrace{d(x, a)}_{=r} < r$ و هذا تناقض و بالتالي نجد أن :

$$\mathrm{N_d}(x, r) \subseteq X \setminus \{a\} = A$$

و هذا يبين أن المجموعة $\mathrm{A} = X \setminus \{a\}$ مفتوحة ، و بالتال متممتها مجموعة مغلقة أي أن المجموعة $\{a\}$ مجموعة مغلقة

الآن ، إن أي مجموعة منتهية مثل $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصرها (كمجموعات وحيدة العنصر) أي:

$$\mathrm{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}$$

و حسب نص سابق ، إن الاجتماع المنتهي لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة ، و يتم بذلك المطلوب .

السؤال السادس : أثبت أنت كلاً من التابعين التاليين هو تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$:

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2;$$
$$d_1(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2|$$
$$d_2(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

الحل :

- **من أجل d_1 :**

حتى تكون دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 ;$$

◄الشرط الأول :(غير سالب)

$$d_1(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2| \geq 0$$

و ذلك حسب تعريف دالة القيمة المطلقة

◄الشرط الثاني :

$$d_1(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2| = 0$$

و لكن إذا كان مجموع مقادير غير سالبة هو الصفر فإن كل من هذه المقادير معدوم أي :

$$\begin{cases} |x_1 - x_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \\ 3|y_1 - y_2| = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

◄الشرط الثالث :(التناظر)

$$d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + 3|y_2 - y_1| = d(z_2, z_1)$$

◄الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) :

$$d_1(z_1, z_3) = |x_1 - x_3| + 3|y_1 - y_3|$$
$$= |x_1 - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_2} - x_3| + 3|y_1 - \boldsymbol{y_2} + \boldsymbol{y_2} - y_3|$$
$$\underset{\text{خواص قيمة مطلقة}}{\underbrace{\leq}} \quad |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + 3|y_1 - y_2| + 3|y_2 - y_3|$$

$\boldsymbol{d_1(z_1, z_2)}$ $\quad$ $\boldsymbol{d_1(z_2, z_3)}$

و هذا يبين أن : $d_1(z_1,z_3) \le d_1(z_1,z_2) + d_1(z_2,z_3)$

من تحقق الشروط الأربعة نجد أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$

- من أجل $\mathrm{d} = \mathrm{d}_2$:

حتى تكون دالة مسافة يجب تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

ليكن $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X$:

☒ **الشرط الأول :**

$\forall x, y \in X \,; d(x,y) \ge 0$ و هو محقق وضوحاً

☒ **الشرط الثاني :**

$\forall x, y \in X \,; d(x,y) = d(y,x)$ و لنتحقق من ذلك:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_1)^2} = d(y,x)$$

☒ **الشرط الثالث:**

$\forall x, y \in X \,; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$ و لنتحقق من ذلك :

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - y_1 = 0 \;\&\; x_2 - y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = y_1 \;\&\; x_2 = y_2 \;\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow x = y$$

(مجموع مقادير غير سالبة يكون معدوماً عندما و فقط عندما يكون كل منها معدوم)

☒ **الشرط الرابع : متراجحة المثلث :** ليكن $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$

و نريد اثبات أن $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ أي لنثبت أن :

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \le \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}$$

نضع $c_1 = x_1 - z_1 \;,\; c_2 = x_2 - z_2$ و أيضاً :

$$a_1 = x_1 - y_1 \;,\; a_2 = x_2 - y_2 \;,\; b_1 = y_1 - z_1 \;,\; b_2 = y_2 - z_2$$

بجمع a_1 و b_1 نجد أن $\boxed{c_1 = a_1 + b_1}$ و أيضاً بجمع a_2 و b_2 نجد أن $\boxed{c_2 = a_2 + b_2}$

فيصبح لدينا: $d(y,z) = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $d(x,y) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ و أيضاً :

$$d(x,z) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \Rightarrow d^2(x,z) = c_1^2 + c_2^2$$

و حسب ما وجدنا سابقاً :

$$d^2(x,z) = c_1^2 + c_2^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2$$

$$= a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2$$
$$= (a_1^2 + a_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) + (b_1^2 + b_2^2)$$
$$= d^2(x,y) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) + d^2(y,z)$$
$$\underbrace{\leq}_{t\leq|t|} d^2(x,y) + 2|a_1b_1 + a_2b_2| + d^2(y,z) \dots\dots (*)$$

و لكن لنلاحظ ما يلي :

$$|a_1b_1 + a_2b_2|^2 = |a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2|$$
$$\underbrace{\leq}_{|u+v+w|\leq|u|+|v|+|w|} |a_1^2b_1^2| + 2|a_1b_2a_2b_1| + |a_2^2b_2^2| \dots (**)$$

من جهة أخرى واضح أن $0 \leq (|a_1b_2| - |a_2b_1|)^2$ و هذا يكافئ قولنا أن :

$$0 \leq |a_1b_2|^2 - 2|a_1b_2||a_2b_1| + |a_2b_1|^2$$
$$2|a_1b_2||a_2b_1| \leq |a_1b_2|^2 + |a_2b_1|^2$$

سنستفيد من هذ المتراجحة $(**)$:

$$|a_1b_1 + a_2b_2|^2 \leq |a_1^2b_1^2| + 2|a_1b_1a_2b_2| + |a_2^2b_2^2|$$
$$\leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)b_1^2 + (a_1^2 + a_2^2)b_2^2$$
$$= \underbrace{(a_1^2 + a_2^2)}_{d^2(x,y)}\underbrace{(b_1^2 + b_2^2)}_{d^2(y,z)}$$

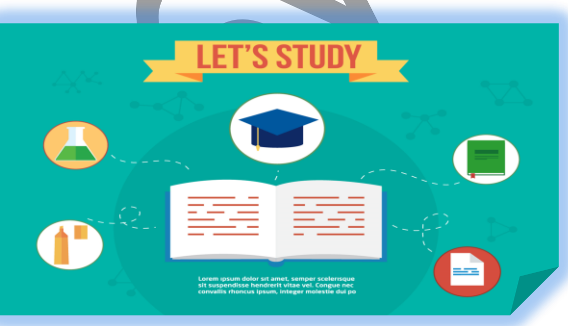
$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{بجذر الطرفين}} |a_1b_1 + a_2b_2| \leq d(x,y).d(y,z)$$

نعوض في $(*)$:

$$d^2(x,z) \leq d^2(x,y) + 2d(x,y).d(y,z) + d^2(y,z) = \big(d(x,y) + d(y,z)\big)^2$$

بجذر الطرفين غير السالبين :

$$\boxed{d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)}$$



انتهت دورة الفصل الثاني ☺

أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٥-٢٠١٦) :

السؤال الأول : عرف المصطلحات التالية : النقطة الداخلية – نقطة التجمع – النقطة الملاصقة – المجموعة الكثيفة – تابع المسافة .

السؤال الثاني : لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقة و ليكن C صف المجموعات المؤلف من المجموعة الخالية و كل المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$ التي متمماتها منتهية ، أثبت أن C تشكل طوبولوجيا على $\mathbb{R}$

السؤال الثالث : إذا كانت $X = \{a, b, c, d, e\}$ و كانت $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ و كانت $A = \{b, c, d, e\}$ أوجد $A', \bar{A}, A^{\circ}$

السؤال الرابع : أوجد المجموعات التالية في الطوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$

1) $(]2,5[)^{\circ}$, $(]2,5[)'$, $\overline{(]2,5[)}$
2) $(\{1,23\})^{\circ}$, $(\{1,23\})'$, $\overline{(\{1,23\})}$
3) $\left(\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}\right)'$

السؤال الخامس : برهن ما يلي :

١- كل متتالية متقاربة في فضاء متري تكون محدودة
٢- كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مغلقة

السؤال السادس : أثبت أنت كلاً من التابعين التاليين هو تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$:

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2;$$
$$d_1(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + 8|y_1 - y_2|$$
$$d_2(z_1, z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

و أوجد الكرة المفتوحة $N_{d_2}\big((0,0), 1\big)$

انتهت الأسئلة ☺

ملاحظة : (دورة مكررة و مطابقة تماماً للدورة التكميلية المحلولة في بداية هذا الملف)

إعداد : نذير تيناوي