نظري

◄ دكتور المادة: ملك مارديني

◄المحاضرة السادسة عشر عنوان المحاضرة: المعادلات الجزئية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتمارين وظيفة أعطيت للزمرة الثانية.

٢ـحل مثال بطريقة شارب.

٣ـحل المعادلات بطريقة جاكوبي.

◄أوجد الحل التام للمعادلات التالية بطريقة شارب:

التمارين التي وردت للزمرة الثانية

$$1)\ z - pq = 0$$

$$2)\ (p+q)(px+qy) = 0$$

$$3)\ (z+qy)^2 - p = 0$$

مثال: أوجد الحل التام للمعادلة التالية بطريقة شارب:

$$(z+px)^2 - q = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

١) لنوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2p(z+px)\,,\frac{\partial F}{\partial y} = 0\,,\frac{\partial F}{\partial z} = 2(z+px)\,,\frac{\partial F}{\partial p} = 2x(z+px)\,,\frac{\partial F}{\partial q} = -1$$

٢) نعوض هذه المشتقات في الجملة الملحقة التي أخذناها في المحاضرة السابقة(معادلة (8))

$$\frac{dx}{2x(z+px)} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{2xp(z+px)-q} = -\frac{dp}{4p(z+px)} = -\frac{dq}{2q(z+px)}$$

من $(1)\&\&(4)$ نجد :

$$\frac{dx}{2x(z+px)}=-\frac{dp}{4p(z+px)}\Rightarrow\frac{dx}{x}=-\frac{dp}{2p}\xRightarrow{\text{بالمكاملة}}\ln x=-\frac{1}{2}\ln p+\ln\alpha\rightarrow$$

$$\ln x=\ln\frac{\alpha}{p^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow x=\frac{\alpha}{p^{\frac{1}{2}}}\xRightarrow{\text{بالتربيع}}p=\frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{q}{x^2}\left(\text{باعتبار أن } \alpha^2=q\right)\Rightarrow \boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{x^2}}$$

والآن نعوض p في المعادلة (1) ومنه :

$$\left(z+\frac{q}{x^2}x\right)^2-q=0\Rightarrow q=\left(z+\frac{q}{x^2}x\right)^2=\left(z+\frac{q}{x}\right)^2$$

نعوض في المعادلة الكلية والتي من الشكل:

$$dz=pdx+qdy\ \Rightarrow dz=\frac{a}{x^2}dx+\left(z+\frac{q}{x^2}x\right)^2dy\ \Rightarrow$$

$$dy=\frac{dz-\frac{a}{x^2}dx}{\left(z+\frac{q}{x^2}x\right)^2}$$

نريد علاقة تجمع بين البسط والمقام ولذلك فاضلنا البسط بحيث:

$$dy=\frac{d\left(z+\frac{a}{x}\right)}{\left(z+\frac{q}{x^2}x\right)^2}$$ البسط عبارة عن مشتق المقام

بالمكاملة نجد :

$$y+b=-\frac{1}{z+\frac{a}{x}}\Rightarrow z+\frac{a}{x}=-\frac{1}{(y+b)}\Rightarrow z+\frac{a}{x}+\frac{1}{y+b}=0$$ الحل التام

أما في حالة الحل العام يكون من الشكل :

$$z+\frac{a}{x}+\frac{1}{y+\tau(a)}=0$$

أما في حالة الحل الخاص نعوض بدل $\tau(a)$ عدد ما وليكن $2a$ ومنه:

$$z+\frac{a}{x}+\frac{1}{y+2a}=0$$

طريقة جاكوبي: ليكن لدينا معادلة تفاضلية جزئية مرتبة أولى بأكثر من متحولين ولتكن من الشكل:

$$F(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)=0\ \dots\dots\dots(1)$$

بحيث لا تظهر z إلا من خلال مشتقاتها الجزئية:

$$p_i=\frac{dz}{dx_i}: i=1,2,3,\dots\dots\dots,n$$

تتلخص هذه الطريقة ب:

١) الحصول عالى الجملة المساعدة أو جملة ملحقة:

$$\frac{dx_1}{-\frac{\partial F}{\partial p_1}}=\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}}=\frac{dx_2}{-\frac{\partial F}{\partial p_2}}=\frac{dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}}=\frac{dx_3}{-\frac{\partial F}{\partial p_3}}=\frac{dp_3}{\frac{\partial F}{\partial x_3}}$$

٢) إيجاد تكاملين أوليين من الجملة الملحقة :

$$f_1(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)=a_1\ \dots\dots\dots(2)$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)=a_2\ \dots\dots\dots(3)$$

حيث a_1,a_2 ثابتين كيفيين

٣) من المعادلات $(1),(2),(3)$ نحصل على p_i بحيث:

$$p_i=\varphi(x_1,x_2,x_3,a_1,a_2): i=1,2,3,\dots\dots\dots,n$$

وبالتالي أصبحت معادلة تابعة ل x والثوابت.

٤) نعوض p_i في المعادلة التفاضلية الكلية :

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 \dots\dots\dots (4)$$

وبالتالي نشتق p_1 بالنسبة ل x_1 وأيضاً نشتق p_2 بالنسبة ل x_2 ونشتق p_3 بالنسبة لx_3

نكامل المعادلة (4) نحصل على الحل التام للمعادلة (1)

تمرين: كامل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية (نستخدم طريقة جاكوبي لان المعادلة تحوي $(x_1, x_2, x_3$

$$2p_1x_1x_3 + 3p_2x_3^2 + p_2^2p_3 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

١) نقوم بإيجاد الجملة الملحقة حسب خطوات جاكوبي:

$$\frac{dx_1}{-2x_1x_3} = \frac{dp_1}{2p_1x_3} = \frac{dx_2}{-3x_3^2 - 2p_2p_3} = \frac{dp_2}{0} = \frac{dx_3}{-p_2^2} = \frac{dp_3}{2p_1x_1 + 6p_1x_3}$$

٢) إيجاد تكاملين من أحد النسب (نختار نسبتين لإيجاد الثابتين a_1, a_2)

$$(1)\&(2) \Rightarrow \frac{dx_1}{-2x_1x_3} = \frac{dp_1}{2p_1x_3} \Rightarrow \frac{dx_1}{-x_1} = \frac{dp_1}{p_1} \Rightarrow \ln\frac{1}{x_1} + \ln a_1 = \ln p_1 \Rightarrow$$

$$\ln\frac{a_1}{x_1} = \ln p_1 \Rightarrow \boldsymbol{p_1 = \frac{a_1}{x_1}} \dots\dots\dots \mathbf{(4)} \rightarrow \boldsymbol{a_1 = x_1p_1} \rightarrow \boldsymbol{F_1 = x_1p_1 = a_1}$$

$$\text{من}(4) \rightarrow dp_2 = 0 \overset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} p_2 = a_2 \rightarrow F_2 = p_2 = a_2$$

وبالتالي أصبح لدينا $p_1 = \frac{a_1}{x_1}$, $p_2 = a_2$

والآن نعوض كلاً من p_1, p_2 في المعادلة (1) لإيجاد p_3 ومنه:

$$p_3 = \frac{-ap_1x_1x_3 + 3p_2x_3^2}{p_2^2} = -\frac{1}{a_2^2}\,(2a_1x_3 + 3a_2x_3^2)$$

٣) نعوض في dz كلاً من p_1, p_2, p_3 في المعادلة التفاضلية الكلية:

$$dz = \frac{a_1}{x_1}dx_1 + a_2dx_2 - \frac{1}{a_2^2}\ (2a_1x_3 + 3a_2x_3^2)dx_3 \xRightarrow{\text{بالمكاملة...}}$$

$$z = a_1 \ln x_1 + a_2x_2 - \frac{1}{a_2^2}\left(2a_1x_3^2 + \frac{3}{3}a_2x_3^3\right)$$

حل تمرين من الوظائف

أوجد الحل التام للمعادلة التفاضلية التالية (بطريقة شارب):

$$z - pq = 0$$

نوجد المشتقات:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0\,, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = 1, \frac{\partial F}{\partial p} = -q, \frac{\partial F}{\partial q} = -p \xRightarrow{\text{نعوضها في الجملة الملحقة}}$$

$$\frac{dx}{-q} = \frac{dy}{-p} = \frac{dz}{-2pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q} \xRightarrow{\text{من }(4)\&(5)} -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q}$$

$$\to \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \to \ln p = \ln q + \ln a \to \boldsymbol{p = aq} \xRightarrow{\text{نعوض } p \text{ في المعادلة}(1)} z - pq = 0$$

$$\to z - aq^2 = 0 \to q = \sqrt{\frac{z}{a}} \xRightarrow{\text{نعوض } q \text{ في } p} p = \sqrt{az} \xRightarrow{\text{نعوض } p,q \text{ في المعادلة تفاضلية الكلية}}$$

$$dz = pdx + qdy \to dz = \sqrt{az}\,dx + \sqrt{\frac{z}{a}}dy \to dz = \sqrt{z}\left(\sqrt{a}dx + \frac{1}{\sqrt{a}}dy\right)$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \left(\sqrt{a}dx + \frac{1}{\sqrt{a}}dy\right) \xRightarrow{\text{نكامل}} 2\sqrt{z} = \sqrt{a}x + \frac{y}{\sqrt{a}} + b \xRightarrow{\text{بالتربيع}}$$

$$z = \frac{1}{4}\left[\sqrt{a}x + \frac{y}{\sqrt{a}} + b\right]^2 \quad \text{وهو الحل التام}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه