/ /

الموضوع: ٦٩

$f_n(x) \xrightarrow{?} f(x)$:

$$\frac{2^n f(x) - 1}{2^n} \le \frac{[2^n f(x)]}{2^n} \le \frac{2^n f(x)}{2^n}$$

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \le f_n(x) \le f(x) \le f(x) + \frac{1}{2^n}$$

بالمرور بالنهايات نجد

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$$

$$f(x) + \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$$

حسب الإحاطة،

$$f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

وابحث بين أن f_n متزايد؟ وأكمل الحل ...

انتهت المحاضرة

٢٧/٤/٢٠١٧

المحاضرة الرابعة عشر

ملاحظة هامة: (1) $u \geqslant 0$: $0 \leqslant [u] < 7$

$$\Longrightarrow [u] \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$u - 1 \leqslant [u] \leqslant u$$

$$[u] = n \Longrightarrow u \in [n, n+1[$$

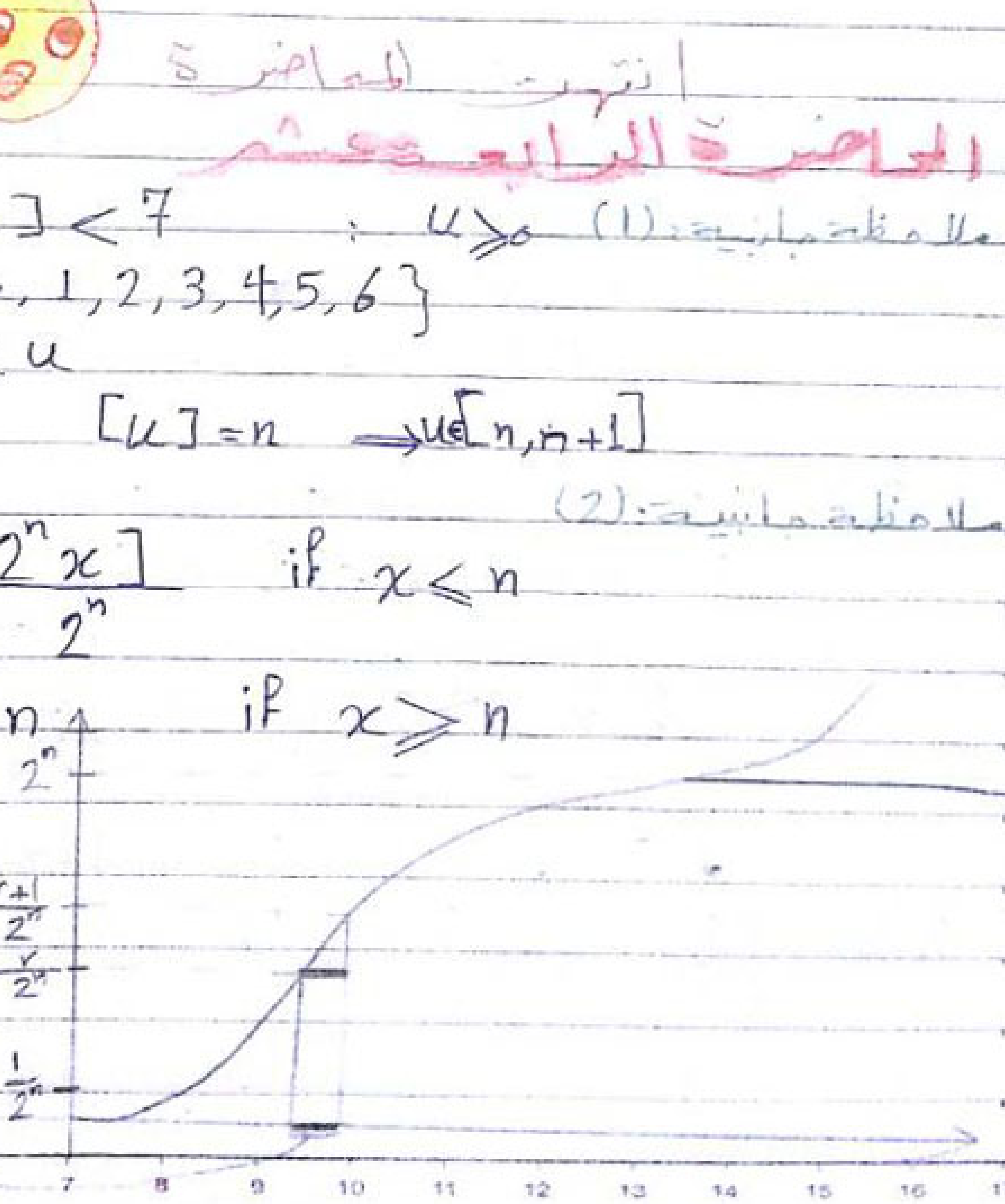
ملاحظة هامة: (2)

$$f_n(x) = \frac{[2^n x]}{2^n} \quad \text{if } x \leqslant n$$

$$f_n(x) = n \quad \text{if } x \geqslant n$$

عدد التقسيمات $\dfrac{2^n}{\frac{1}{2^n}} = 2^{2n}$

$$E_n = \left\{ x : f(x) \in \left[\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}\right] \right\}$$



$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) \in [0, \frac{1}{2^n}[\\ \frac{1}{2^n} & \text{if } f(x) \in [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}[\\ \vdots & \\ \frac{r}{2^n} & \text{if } f(x) \in [\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}[\\ \vdots & \\ 2^n & \text{if } f(x) \in [2^n, \infty[\end{cases}$$

٣-٤-١١- مبرهنة أساسية.

لنفرض أن $(X, \mathcal{S})$ فضاء قيوس، و $f: X \longrightarrow [0, \infty]$ تطبيق موجب $(f \geq 0)$.

إن الشرط اللازم و الكافي ليكون f قيوساً هو وجود متوالية متزايدة (φ_n) من الدوال الدرجية الموجبة و المتقاربة نقطياً من f.

سنعرض فكرة الإثبات

لنفرض أن ثمة متوالية من الدوال الدرجية المتقاربة نقطياً من تطبيق و لكن f و لما كانت أي دالة درجية تطبيق مقيوس فإن النهاية f تطبيق مقيوس وفقه مبرهنة سابقة

لنفرض الآن أن f قيوس و لنثبت وجود مثل هذه المتوالية.

لنفرض أن n أي عدد صحيح موجب مثبت، و لنضع:

$$E_n^r = \begin{cases} \{x \in X : f(x) \in [\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}[\} & \text{عندما } 0 \leq r < 2^{2n} \\ \{x \in X : f(x) \in [2^n, \infty]\} & \text{عندما } r = 2^{2n} \end{cases}$$

إن المجموعات E_n^r مقيوسة من أجل كل n و r لأن f مقيوس فرضاً

لنضع

$$\varphi_n(x) = \sum_{r=0}^{r=2^{2n}} \frac{r}{2^n} \chi_{E_n^r}(x)$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) \in [0, \frac{1}{2^n}[\\ \frac{1}{2^n} & \text{if } f(x) \in [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}[\\ \vdots & \\ \frac{r}{2^n} & \text{if } f(x) \in [\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}[\\ \vdots & \\ 2^n & \text{if } f(x) \in [2^n, \infty[\end{cases}$$

إن φ_n دالة درجية كذلك فإن $\varphi_n(x) \le f(x)$ من أجل كل x من X
لأن أصغر قيمة يأخذها f على E_n^r هي $f(x) = \frac{r}{2^n}$ من تعريف E_n^r و (φ_n) متتالية متزايدة

و إن $\varphi_n(x) \longrightarrow f(x)$ من أجل كل x من X

$\boxed{3}$ خذ $f(x) = x^2$ و جد المتتالية (φ_n) من التوابع الدرجية المتقاربة من f والموافقة لما ورد في المبرهنة الأخيرة من أجل $n=1$ ثم من أجل $n=2$ ثم من أجل $n=3$ و وضح ذلك برسومات مناسبة؟

$$\mathbb{R}_+ = [0, 2^n[\cup [2^n, \infty[$$

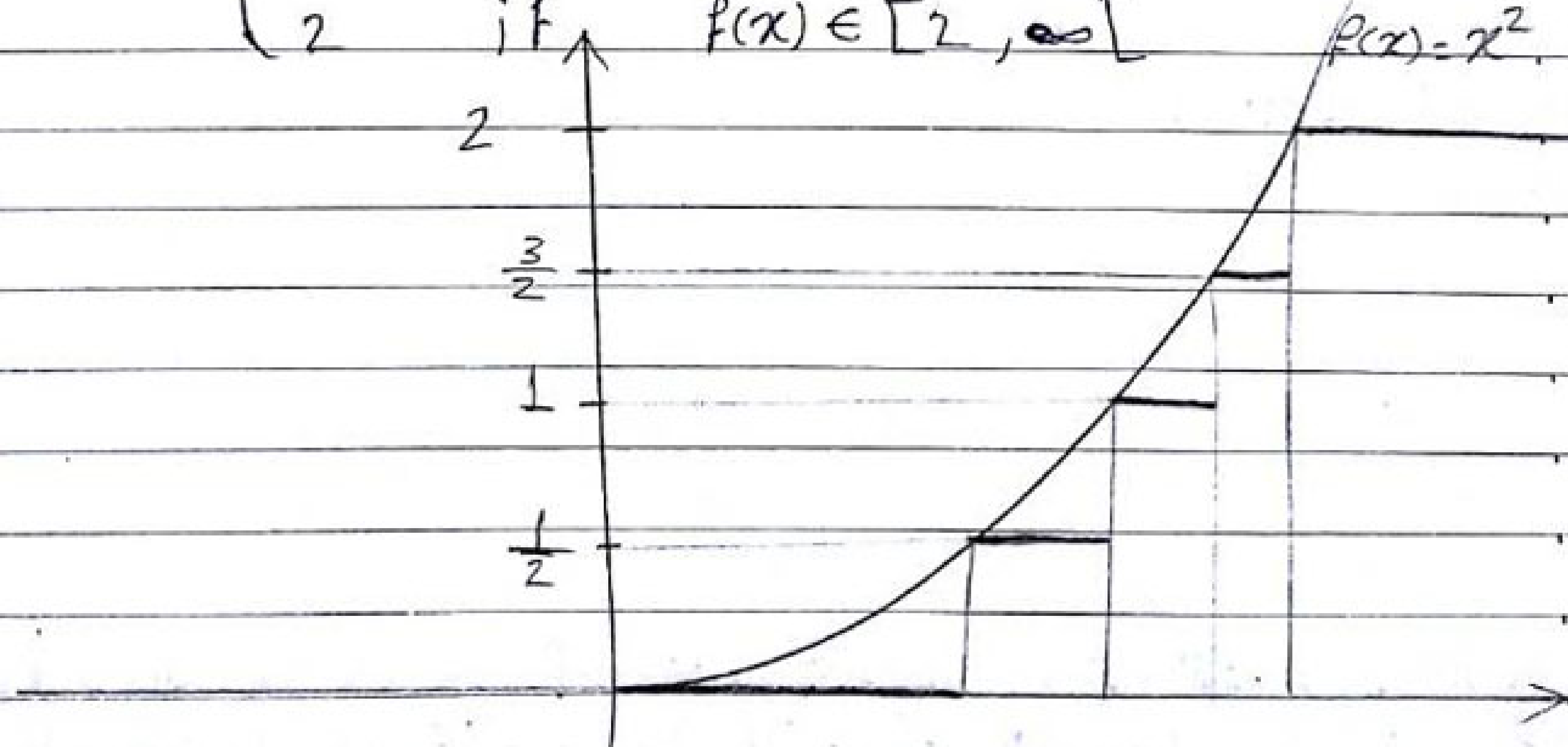
لأجل $n=1$ $\quad \mathbb{R}_+ = [0, 2[\cup [2, +\infty[$

لأجل $n=2$ $\quad \mathbb{R}_+ = [0, 2^2[\cup [2^2, +\infty[$

عندما $n=1$

عدد المجالات $\frac{2^1}{\frac{1}{2^1}} = 4$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{if } f(x) \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 & \text{if } f(x) \in [1, \frac{3}{2}[\\ \frac{3}{2} & \text{if } f(x) \in [\frac{3}{2}, 2[\\ 2 & \text{if } f(x) \in [2, \infty[\end{cases}$$



/ /

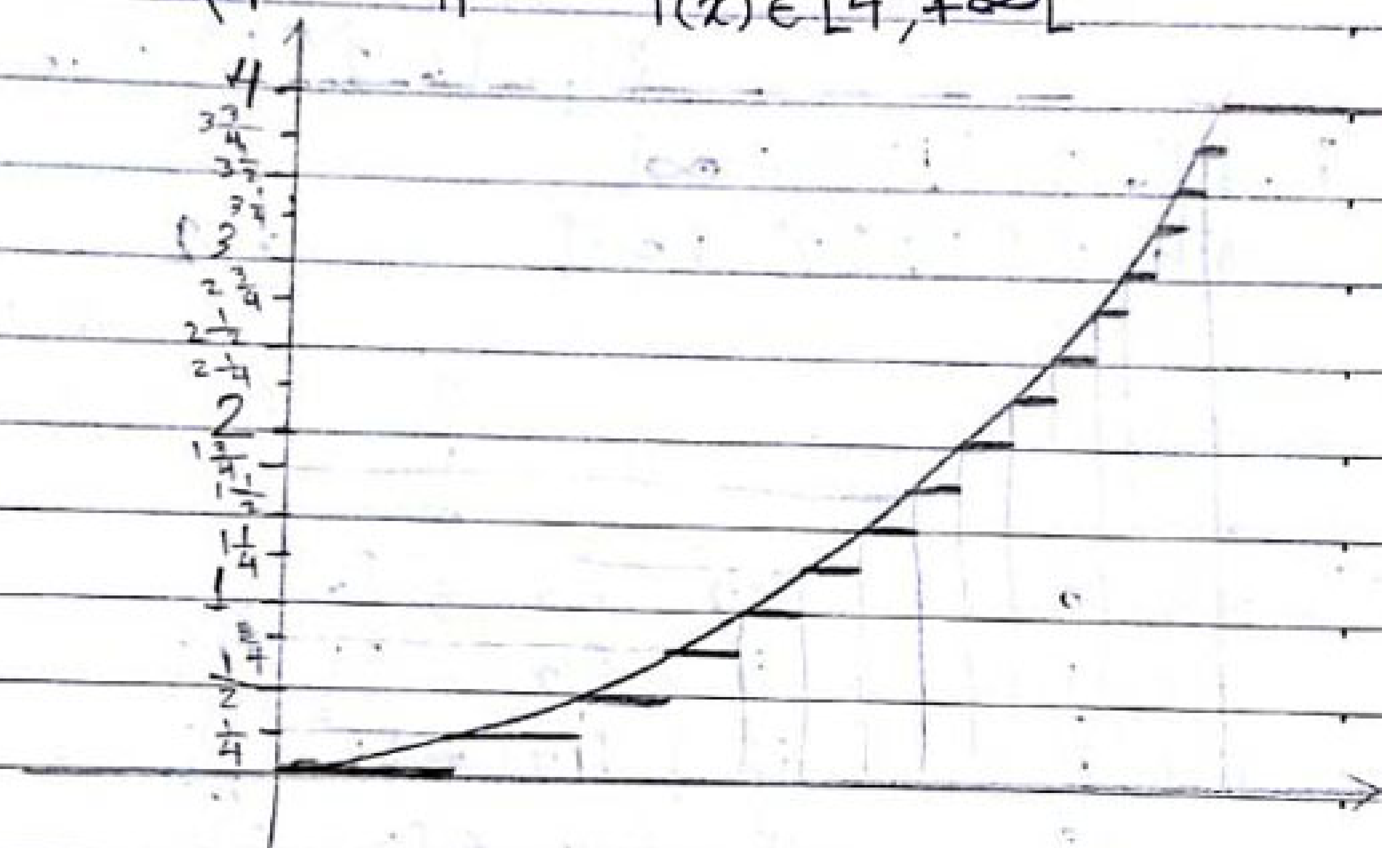
الموضوع: ....

V2

$\boxed{n=2}$ طول المجال الجزئي $\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

عدد المجالات الجزئية. $\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } f(x)\in[0,\frac{1}{4}[\\ \frac{1}{4} & \text{if } f(x)\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{if } f(x)\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[\\ \vdots & \\ 4 & \text{if } f(x)\in[4,+\infty[\end{cases}$$



أما من أجل [٤] فنلاحظ أن الرسم البياني هو:

عدد المجالات $\frac{n}{\frac{1}{2^n}}=n2^n$

* لدي دالة مقيسة موجبة f ← يوجد φ_n متتالية من الدوال البسيطة متقاربة من f ، ويمكن إيجاد $\int \varphi_n$ أي عندما $\int \varphi_n \to \int f$ ← استطعنا إيجاد $\int f$

V ٣

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) \in [0, \frac{1}{2^n}[\\ \frac{1}{2^n} & \text{if } f(x) \in [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}[\\ \vdots & \\ \frac{r}{2^n} & \text{if } f(x) \in [\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}[\\ \vdots & \\ n - \frac{1}{2^n} & \text{if } f(x) \in [n - \frac{1}{2^n}, n[\\ n & \text{if } f(x) \in [n, +\infty[\end{cases}$$

$$f_n(x) = \frac{r}{2^n} \quad \text{if} \quad f(x) \in [\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}[$$

$\rightarrow \quad 2^n f(x) \in [r, r+1[$

$[2^n f(x)] = r$

سؤال عالهامش

فتوس موجب $f(x) \geq 0$

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$

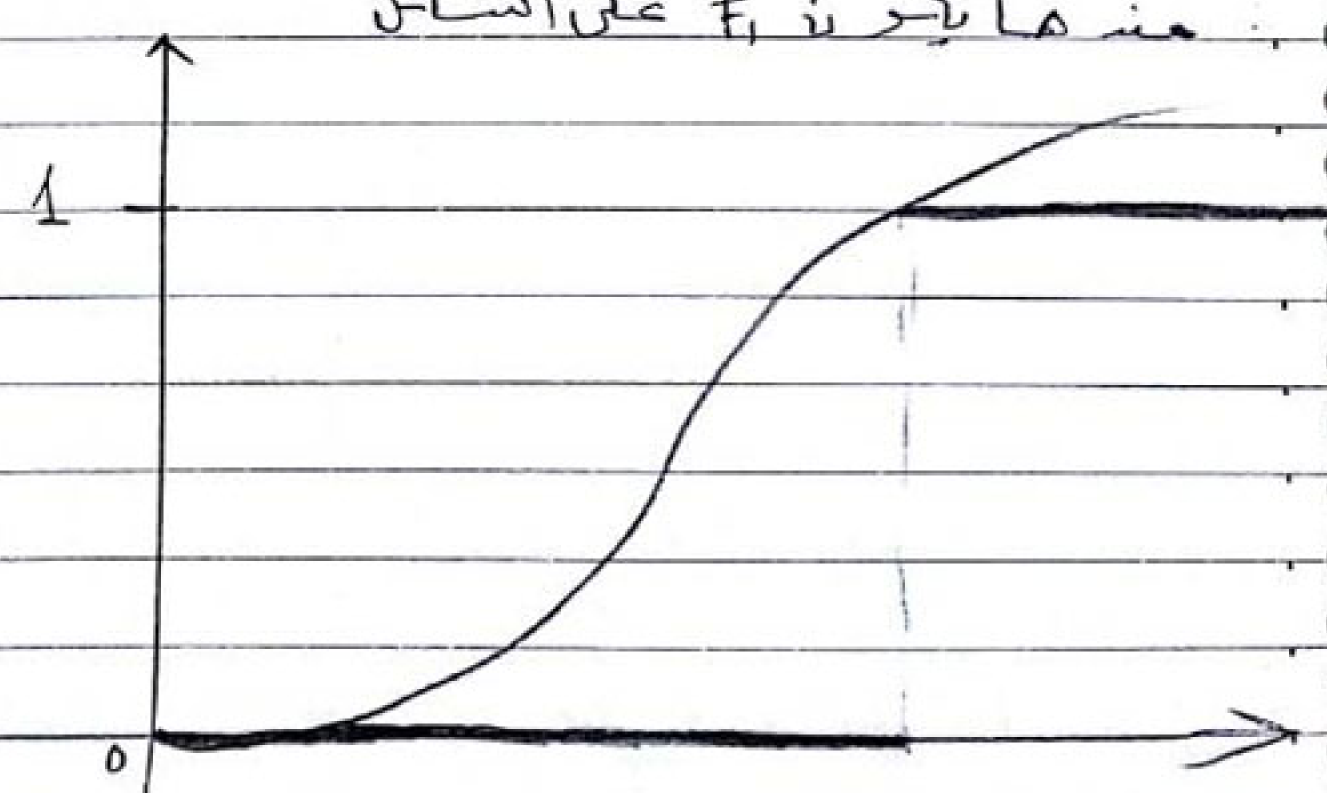
ننرها:

$$f_n(x) = \frac{[n f(x)]}{n} \quad \text{if } f(x) < n$$

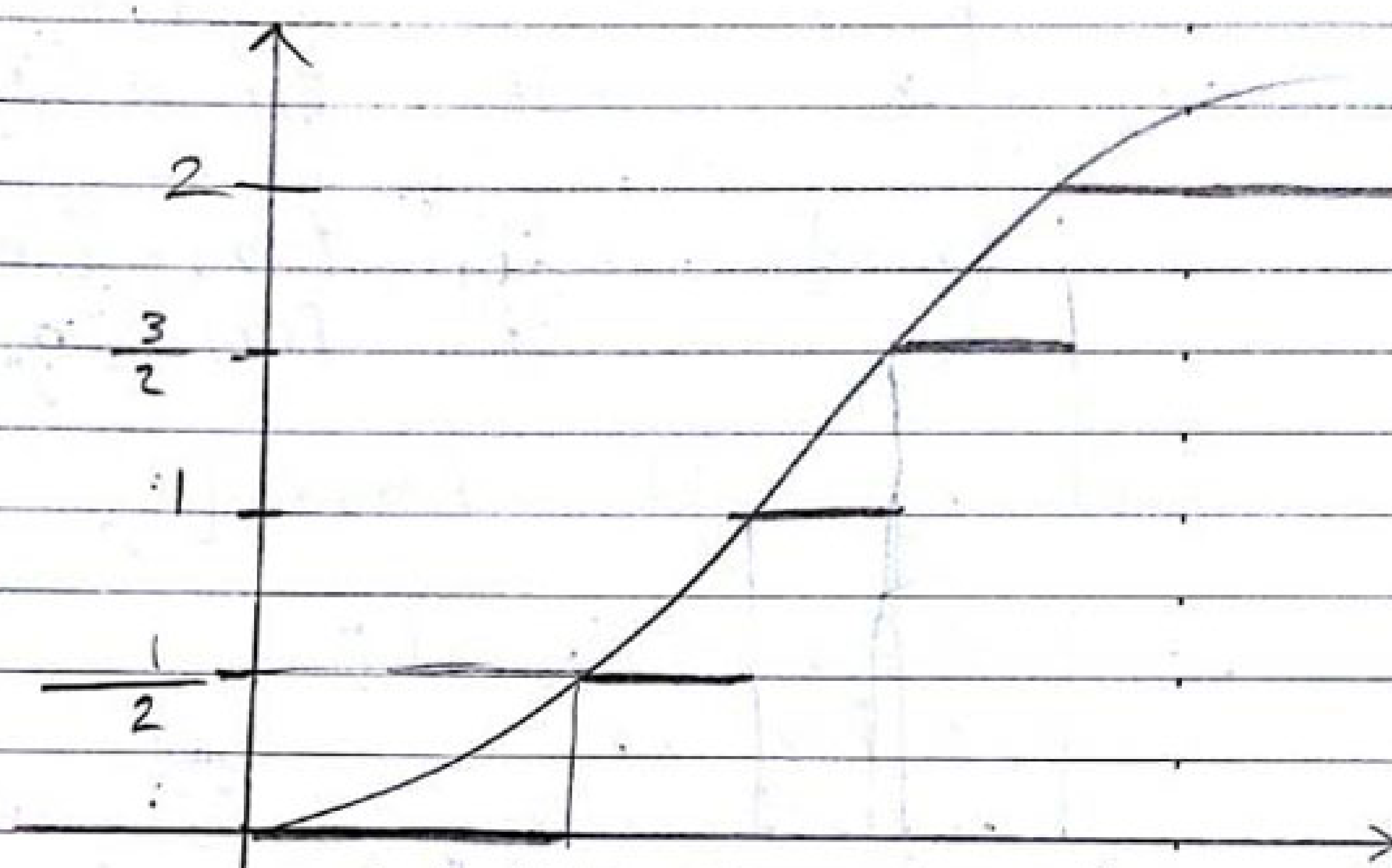
$$f_n(x) = n \quad \text{if } f(x) \geq n$$

من هنا يكون f_1 على الشكل

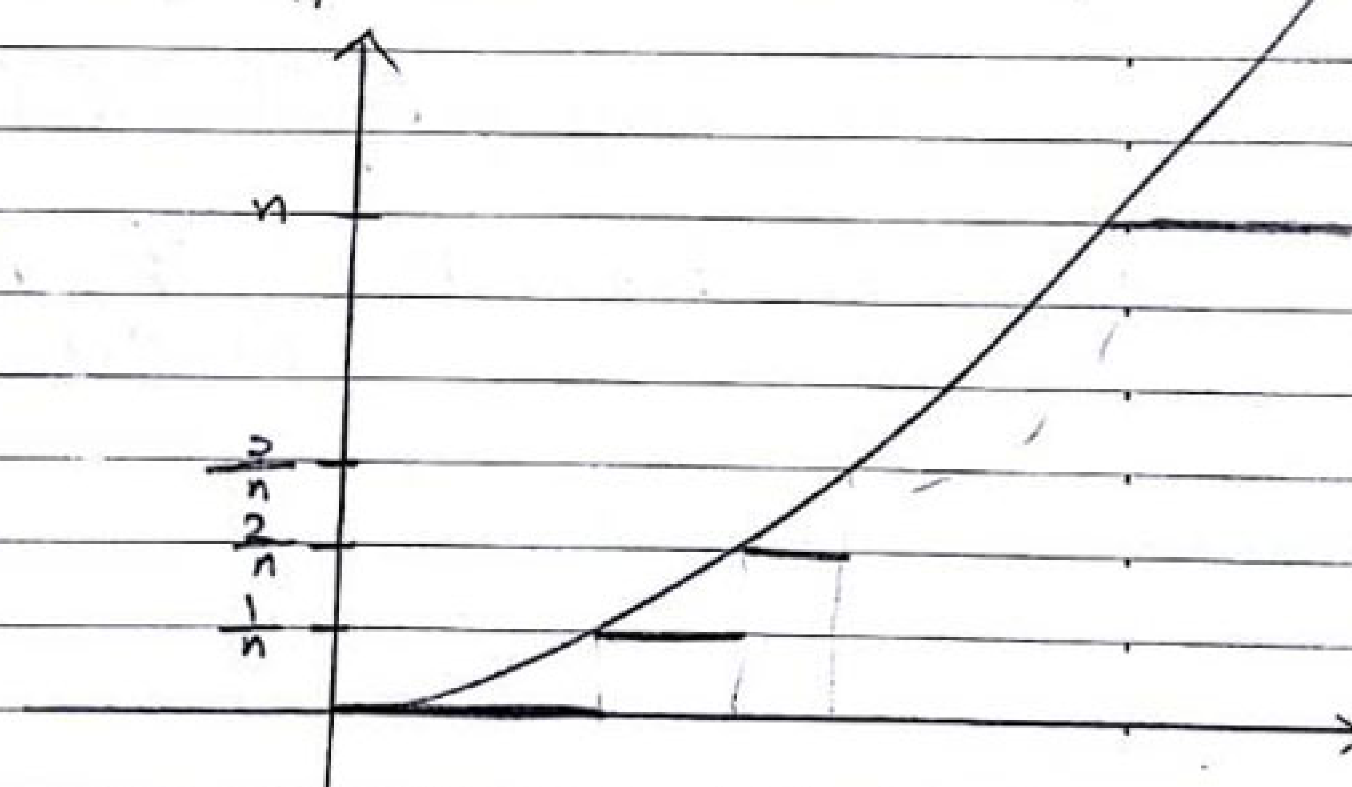
f_1



f_2 عدد الخطوات : $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$



بالحالة العامة تكون الخطوة $\frac{1}{n}$



$f_n(x) = \frac{[n f(x)]}{n}$ if $f(x) < n$

$f_n(x) = n$ if $f(x) \geq n$

عندما $n > f(x)$

$$nf(x)-1 \leq [n f(x)] \leq n f(x)$$

بالتقسيم على n

$$f(x)-\frac{1}{n} \leq f_n \leq f(x)$$

بالمرور بالنهايات وباستخدام مبرهنة الإحاطة نجد:

$$f_n \longrightarrow f$$

ورقة عمل (١) السؤال الأول الشق الثاني.

عرف التقارب بالنسبة إلى قياس معطى وأثبت أن مجموع وفرق متتاليتين متقاربتين بالقياس هما متتاليتان متقاربتان بالقياس:

فكرة الحل:

نقول عن متتالية f_n إنها متقاربة من f وفق القياس μ (أو متقاربة من f بالنسبة للقياس μ) إذا تحقق ما يلي:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Longleftrightarrow \forall \varepsilon : \mu(\{x \in X ; |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow 0$$

لدينا f_n و g_n متقاربتين من f و g على الترتيب وفق القياس μ إذاً نجد:

(1) $\Longleftrightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$

$$\boxed{1}\ \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 : \mu(\{x \in X : |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) \longrightarrow 0$$

(2) $\Longleftrightarrow g_n \xrightarrow{\mu} g$

$$\boxed{2}\ \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 : \mu(\{x \in X : |g_n(x)-g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) \longrightarrow 0$$

والآن لنثبت أن:

$$h_n = f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f+g = h$$

أي لنثبت أن: $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mu(\{x \in X : |h_n(x)-h(x)| \geq \varepsilon\}) \overset{?}{\longrightarrow} 0$

أي لنثبت أن: $\forall \varepsilon > 0 : \mu(\{x \in X : |f_n(x)+g_n(x)-(f+g)| \geq \varepsilon\}) \overset{?}{\longrightarrow} 0$

لنبين أولاً أن

$$\overbrace{\{x : |f_n(x)+g_n(x)-(f(x)+g(x))| \geq \varepsilon\}}^{A_1} \overset{?}{\subseteq}$$

$$\overset{?}{\subseteq} \underbrace{\{x : |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}}_{A_2} \cup \underbrace{\{x : |g_n(x)-g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}}_{A_3}$$

فكرة إثبات ذلك:

لنثبت أن $A_1 \subseteq A_2 \cup A_3$ إما نبين أن $\forall a \in A_1 \Rightarrow a \in A_2 \vee a \in A_3$

أو نبين أن: $a \notin A_2 \wedge a \notin A_3 \Longrightarrow a \notin A_1$

سنستخدم الطريقة الثانية:

$$x \notin A_2 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$x \notin A_3 \Longrightarrow |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| < \varepsilon$$
$$\Longrightarrow x \notin A_1$$

إذن أصبح لدينا:

$$\{x : |(f_n(x)+g_n(x)) - (f(x)+g(x))| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

بأخذ القياس μ للطرفين نجد:

$$\mu(\{\quad\}) \leq \mu(\{\quad\}) + \mu(\{\quad\})$$

وبالمرور للنهايات نجد أن

$$0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة

مبرهنة صفحة 141 واجبة

واجب حضر برهان III من المبرهنة

انتهت المحاضرة ^_^

مراجعة :

تناولنا في الفصل الأول تعاريف : الحلقة - نصف الحلقة - الجبر - نصف الجبر - حلقة σ - جبر - σ ، الصف المطرد ، من أجل صف ح عرفنا $\sigma(C)$ الجبر التام المولد بـ ح وهو أصغر جبر تام يحوي ح "تقاطع جميع الجبور التامة التي تحوي ح"

$M(C)$ الصف المطرد المولد بـ ح " أصغر صف مطرد يحوي ح "

والصف المطرد هو جماعة غير خالية من أجزاء مجموعة ما X يحترم المتتاليات المتزايدة والمتناقصة : بمعنى إذا حوى متتالية متزايدة سيحوي اتحادها وإذا حوى متتالية متناقصة سيحوي تقاطعها

مناقشة مثال :

- لنأخذ الصف $C=\{A ;$ معدودة $A\}$ إن ح حلقة وواضح كذلك هي حلقة - σ إذ أن الاتحاد المعدود لمجموعات معدودة مجموعة معدودة ولكن ح ليست جبراً فهي لا تحوي المجموعة الشاملة بالضرورة "قد تكون المجموعة الشاملة غير معدودة" وهي صف مطرد " كل حلقة - σ هي صف مطرد "

- لنأخذ $X=N$

$$C=\{N,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\dots\}$$

إن ح ليست حلقة فهو غير مغلقة بالنسبة لعملية الفرق ولكن ح صف مطرد : كونه سيحوي اتحاد أي متتالية متزايدة من عناصره وتقاطع أي متتالية متناقصة من عناصره

- $C=\{\phi,N\}$ حلقة ، حلقة - σ - جبر - جبر - σ - طبولوجيا - صف مطرد

- $C=\{\phi,N,\{1,2,3\}\}$ ليست حلقة إذ أنها غير مغلقة بالنسبة لعملية الفرق ولكنها صف مطرد وبالتالي $M(C)=C$

وأصغر جبر تام يحوي ح " الجبر التام المولد بـ ح "

$$\sigma(C)=\{\phi,N,\{1,2,3\},\{\bullet,4,5,\dots\}\}$$

لاحظ : $\sigma(C)\neq M(C)$

★ إن $\sigma(C)=M(C)$ عندما يكون ح جبراً فقط

وهذا ما سنأخذه في مبرهنة الصف المطرد ص ٩٦ هامة

مبرهنة خطيرة

إذا كانت الجماعة $\mathcal{A}$ جبراً في المجموعة X فإن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$

(أي أن أصغر صف مطرد يحوي جبر $\mathcal{A}$ لابد وأن يحوي $\hat{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A})$ بل يساويه)

الإثبات:

إن أي جبر تام في مجموعة هو صف مطرد في هذه المجموعة ومن ثم فإن $\sigma(\mathcal{A})$ صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$. ولما كان $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ أصغر صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$ فإن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$

لنبرهن الآن على صحة العكس $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ وهذا يتم إذا اثبتنا أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبر تام، لأن $\sigma(\mathcal{A})$ أصغر جبر تام يحوي $\mathcal{A}$، وبالاستفادة من التمرين السابق يكفي إثبات أنه جبر

$\boxed{١}$ إذن $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Leftarrow$ لأن $\mathcal{A}$ جبر $\phi, X \in \mathcal{A}$

وبالتالي $\phi, X \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ $\boxed{1}$

$\boxed{٢.}$ نثبت أنه مغلق بالنسبة للتتميم:

نضع $\mathcal{D} = \{E \subseteq X : E^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ ولنبرهن أن $\mathcal{D}$ صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$. إن $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ لأنه إذا كان $E \in \mathcal{A}$ فإن $E^c \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$

إذن E من $\mathcal{D}$

إذا كانت $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من عناصر $\mathcal{D}$ فإن $\{E_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متناقصة من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ومن ثم فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^c$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ لأن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ صف مطرد $\Leftarrow^{\text{دي مورغان}}$ $\left(\mathcal{M}(\mathcal{A}) \ni \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c\right) \Leftarrow$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{D}$

بالمثل نبين أنه إذا كانت $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متناقصة من $\mathcal{D}$ فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ من $\mathcal{D}$

ومن ثم فإن $\mathcal{D}$ صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$. أي أن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}$

لذلك إذا كانت E من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ فإن E من $\mathcal{D}$ ومن ثم فإن E^c من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ أي أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ مغلقة بالنسبة للتتميم.

$\boxed{٣.}$ نثبت أنه مغلق بالنسبة للاجتماع المنتهي:

من أجل ذلك يكفي أن نثبت أنه مغلق بالنسبة لاجتماع أي عنصرين من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. لنثبت أي مجموعة جزئية G من X ولنضع

$S_G=\{E\subseteq X : E\cup G\in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$

S_G غير خالي إذ أنه يحوي X

سنثبت أن S_G صف مطرد، نأخذ $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من S_G ومن
ثم فإن $\{E_n\cup G\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ومنه
فإن $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\cup G$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ أي أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ من S_G وعلى نحو
مماثل نثبت أنه إذا كانت $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متناقصة من عناصر S_G فإن
$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ من S_G

نأخذ الآن A من $\mathcal{A}$

$S_A=\{E\subseteq X : E\cup A\in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$

إن $\mathcal{A}\subseteq S_A$ لأنه إذا كانت E من $\mathcal{A}$ فإن $E\cup A$ من $\mathcal{A}$ لأنه جبر
ولما كان $\mathcal{A}\subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ فإن $E\cup A$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ومن ثم فإن E من S_A
ولما كان S_A صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$ فإن $\mathcal{M}(\mathcal{A})\subseteq S_A$
أي: $E\cup A\in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Leftarrow E\in S_A \Leftarrow E\in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

لاحظ: $E\in S_A \Longleftrightarrow A\in S_E$

نستنتج $\mathcal{A}\subseteq S_E$ ولما كان S_E صفاً مطرداً يحوي $\mathcal{A}$ فإن
$\mathcal{M}(\mathcal{A})\subseteq S_E$

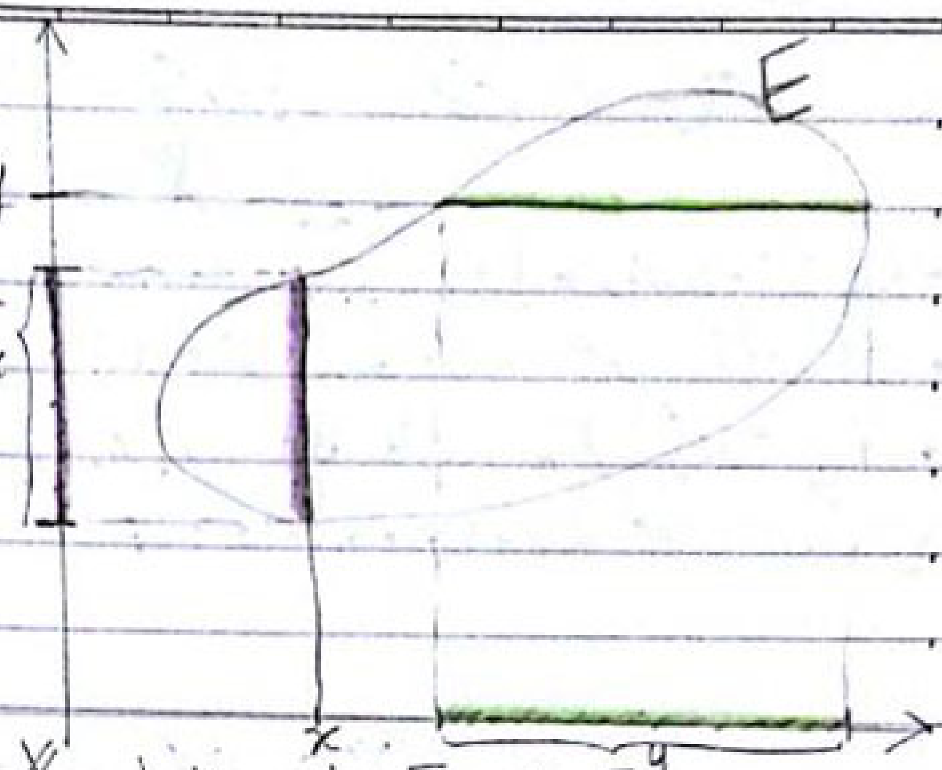
أي أنه من أجل $F\cup E\in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Leftarrow \left(F\in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow F\in S_E\right)$
ويتم المطلوب.

مراجعة لبعض المفاهيم

ليكن $(X,\mathcal{S})$ و $(Y,\mathcal{T})$ فضاءين قيوسين
و $R=\{A\times B : A\in\mathcal{S}, B\in\mathcal{T}\}$ صف المستطيلات القيوسة نلاحظ أن
R نصف حلقة بل نصف جبر $(A=X\in\mathcal{S}, B=Y\in\mathcal{T} \Rightarrow X\times Y\in R)$
$\mathcal{A}=\{E=R_1\cup R_2\cup\dots\cup R_n ; n\geq 1 ; R_i\in R\}$ (نسمي E مجموعة ابتدائية)
نلاحظ أن $\mathcal{A}$ جبر

$$\sigma(R)=\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$$

أي $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ هو أصغر جبر تام يحوي صف المستطيلات وهو أصغر جبر تام يحوي
صف المجموعات الابتدائية. ← الجداء التنسوري للجبرين التامين $\mathcal{S}$ و $\mathcal{T}$
وحسب المبرهنة السابقة $\mathcal{M}(\mathcal{A})=\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ ← أصغر صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$



E_x مقطع E وفق x $(E_x \subseteq Y)$

E^y مقطع E وفق y $(E^y \subseteq X)$

ونعرف بالشكل التالي:

$E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$

$E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$

وتتحقق الخاصة: $(A \cup B)_x = A_x \cup B_x$

لنثبتها:

$(A \cup B)_x = \{y \in Y ; (x,y) \in A \cup B\}$

$A_x = \{y \in Y : (x,y) \in A\}$

$B_x = \{x \in X : (x,y) \in B\}$

$y \in (A \cup B)_x \overset{?}{\Longleftrightarrow} y \in A_x \cup B_x$

$(A \cup B)_x = \{y \in Y : (x,y) \in A \cup B\}$

$y \in (A \cup B)_x$

ولكن $\Longleftrightarrow (x,y) \in A \cup B \Longleftrightarrow (x,y) \in A$ or $(x,y) \in B$

$\Longleftrightarrow y \in A_x$ or $y \in B_x$

$\Longleftrightarrow y \in A_x \cup B_x$

وبالمثل نبين أن $(A \cap B)_x = A_x \cap B_x$

المقاطع تنسجم مع العمليات المجموعاتية.

بالنتيجة: إذا كانت لدينا متتالية متزايدة:

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \; ; A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

الموضوع:

فإن: $A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$: $(A_1)_x \subseteq (A_2)_x \subseteq \dots \subseteq (A_n)_x$

متتالية المقاطع ستكون متزايدة أيضاً وتحقق $A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$

عدد المراجع هامة ستفيدنا في إثبات المبرهنات من ص ١٠٠ إلى ص 108 لاحقاً

تمارين وتطبيقات الفصل الخامس صفحة ١١٢

[1] هام نظراً وعملاً (ستعرف السبب 😊)

لكن لدينا $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $g(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$h(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

f, g, h معرفة على $]0,1[\times]0,1[$

عندئذٍ: أوجد: $h'_x = ?\ ,\ h'_y = ?\ ,\ g'_x = ?\ ,\ g'_y = ?$

ثم احسب $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ و $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$

ملاحظة: في هذا التمرين سؤال مهم:

f غير كمول لأن $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy \neq \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$ وهنا تكمن أهمية شرط

كون f قيوس موجب في مبرهنة فوبيني، وهذا المثال يبين أن فوبيني غير صحيحة

إذا لم يكن التابع موجب قيوس.

الحل:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = g'_x(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} = g'_x(x,y)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = g'_y(x,y) = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = h'_x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = h'_y = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}} = h'_y(x,y)$$

$$\int_0^1\int_0^1 f\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^1 -\frac{\partial g}{\partial x}\,dx\right)dy = \int_0^1 \left(\left.\frac{-x}{x^2+y^2}\right|_0^1\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}\,dy = -\left.\arctan y\right|_0^1 = -\frac{\pi}{4}$$

وهكذا نكمل بقية الحل ....

انتهت المحاضرة 😊