حساب مساحات الأشكال في حالة الاحداثيات الوسيطية:

إذا كان المنحني معطى بالمعادلتين الوسيطتين:

$x = x(t)$

$y = y(t)$ $\quad t_1 \le t \le t_2$

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,.\,x'(t)\,dt}$$ قانون وسيطياً

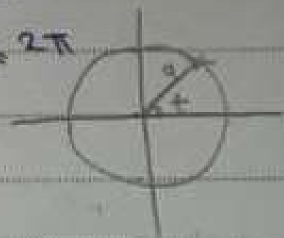
الدائرة ديكارتياً $x^2+y^2=R^2$

مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها a

وسيطياً

$x = a\cos t$

$y = a\sin t$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$



وظيفة: احسب مساحة الدائرة ديكارتياً ووسيطياً.

ديكارتياً:

$$\boxed{S = 2\int_{-a}^{a} y\,dx}$$

$$= 2\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 4\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

نفرض

$x = a\cos t \Rightarrow t = \arccos\frac{x}{a}$

$dx = -a\sin t\,dt$

$$= -4a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t\sqrt{1-\cos^2 t}\,dt$$

t	x
$\frac{\pi}{2}$	0
0	a

تكملة التمرين

وسيطياً:

$x' = -a\sin t$ $\quad y(t).x'(t)\,dt$

$$S = \int_0^{2\pi}(a\sin t)(-a\sin t)\,dt$$

$$= -a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$

احسب المساحة التي يحصرها منحني السيكلوئيد المعطى وسيطياً:

$x = a(t-\sin t)$

$y = a(1-\cos t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$x'(t) = a(1-\cos t)$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,.\,x'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,.\,a(1-\cos t)\,dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$$ نشر مطابقة

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$ تخفيض درجة

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2t)\,dt$$

$$= a^2\left(t-2\sin t+\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= a^2(2\pi+\pi)$$

$$= 3\pi a^2$$

حساب المساحة في حالة المنحني معطى بالمعادلات القطبية:

ليكن المنحني

$r = r(\theta)$

$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \, d\theta$$

مثال: حساب مساحة الدائرة في حالة المعادلات القطبية:

$r = a$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

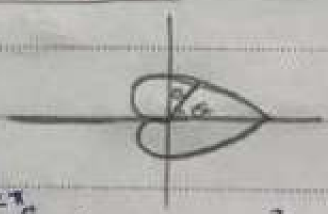
$$= \frac{a^2}{2}\left[2\pi - 0\right] = \pi a^2$$

a عدد ثابت بالنسبة لـ θ

احسب المساحة التي يحصرها منحني الكارديوئيد:

$\boxed{r = a(1+\cos\theta)}$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$a > 0$



$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 \, d\theta$$

أخذنا من $2\pi \to 0$ وعندما نأخذ $\pi \to 0$ نضرب بـ 2

$$= \int_0^{\pi} a^2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$

نكمل الحل حسب فكرة التمرين السابقة

احسب مساحة القطع الناقص ديكارتياً ووسيطياً.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ديكارتياً:

$$S = 2\int_{-a}^{a} y \, dx = 4\int_0^{a} y \, dx$$

وسيطياً: أخذنا من $\frac{\pi}{2} \to 0$ قطع ناقص متناظر فنأخذ ربعه ونضرب بـ 4

$x = a\cos t$

$y = b\sin t$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$S = \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x'(t) \, dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \cdot x'(t) \, dt$$

حساب السطح الدوراني:

مساحة السطح المتولد عن دوران المنحني $y = f(x)$ حول ox.

تعطى بالعلاقة:

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

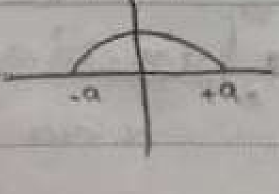
محدد بالمستقيمين

$x = a \qquad x = b$

مثال: سطح الكرة ينتج عن دوران نصف دائرة

$x^2 + y^2 = a^2$

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$



$y^2 = a^2 - x^2$

نشتق

$2yy' = -2x$

$y' = -\frac{x}{y}$

$y'^2 = \frac{x^2}{y^2}$

$$S = 2\pi\int_{-a}^{+a} y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{y^2+x^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a} a\,dx$$

$$= 2\pi a\,[x]_{-a}^{a}$$

$$S = 2\pi a(a+a)$$

$$= 4\pi a^2$$

لنحسب الحجم الناتج عن دوران المنحني

$(x-4a)y^2 = ax(x-3a)$

حول ox حيث

$0 \le x \le 3a$

$$V = \pi\int_0^{3a} y^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{3a} ax\frac{(x-3a)}{(x-4a)}\,dx$$

$$= \pi\int_0^{3a} \frac{ax^2-3a^2x}{x-4a}\,dx$$

قسمة مطولة

تكملة

وظيفة:

احسب حجم المخروط.

الناتج عن دوران المستقيم ،

$y = mx$

$0 \le x \le a$ مقدار ثابت بحيث تكون منتهية

احسب السطح الناتج عن دوران المنحني

$y = \sin 2x$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ حول ox حيث

نعوض مباشرة

$$S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$y' = 2\cos 2x$

$$S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx$$

$2\cos 2x = t$

$-4\sin 2x\,dx = dt$

x	t
0	2
$\frac{\pi}{2}$	-2

حدود التكامل

$$S = 2\pi\int_2^{-2} -\frac{1}{4}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

جزئية.

وباقي المحاضرة مقرر

مع تمنياتي بالنجاحات

إعداد: راما رجب