الفصل السادس :

الفضاءات الهرميتية (الواحدية)

* تعريف :

ليكن V فضاءً شعاعياً معرفاً على حقل الأعداد العقدية ($F = \mathbb{C}$) ، وليكن $\varphi : V \times V \to F = \mathbb{C}$ تطبيقاً ،
نقول عن φ إنه شكل هرميتي إذا تحقق ما يلي :

$\forall\, v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$

$\lambda \in F = \mathbb{C}$

① $\varphi(v_1 + v_2, w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$

$\varphi(\lambda v, w) = \lambda\, \varphi(v, w)$ ؛

← φ خطي بالنسبة للمركبة الأولى .

② $\varphi(v, w_1 + w_2) = \varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2)$

$\varphi(v, \lambda w) = \bar{\lambda}\, \varphi(v, w)$ ؛

مرافقه

← φ نصف خطي بالنسبة للمركبة الثانية .

③ $\varphi(v, w) = \overline{\varphi(w, v)}$

* تذكرة لبعض المفاهيم العقدية :

$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$

$i^2 = -1$ الوحدة التخيلية

$z = x + iy \iff z \in \mathbb{C}$

$x = Re(z) \in R$ القسم الحقيقي للعدد Z

$y = Im(z) \in R$ القسم التخيلي للعدد Z

* نسمي $\bar{Z}$ مرافق العدد Z

$$\bar{Z} = x - iy$$

* نعرف طويلة العدد العقدي Z

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Z \cdot \bar{Z} = x^2 + y^2 = |Z|^2$$

$$Z + \bar{Z} = 2 Re Z = 2x$$

$$Z - \bar{Z} = 2i Im Z = 2iy$$

$$\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}$$

$$\overline{Z \cdot Z'} = \bar{Z} \cdot \bar{Z'}$$

$$\bar{\bar{Z}} = Z$$

من أجل أي عدد $Z \in C$

$$x = Re Z \leqslant |Z|$$

$$y = Im Z \leqslant |Z|$$

$$\bar{Z} = -Z \iff Z \in R$$

$Z = iy$ تخيلي بحت

$$\bar{Z} = Z \iff Z \in R$$

حقيقي بحت

تعريف:

11) ليكن $\varphi = f$ و $\varphi: V\times V \to$ شكلاً هرميتياً عندئذٍ نسمي التطبيق $q = f$ و $q: V \to$ المعرف كما يلي

$$\forall v \in V \; ; \; q(v) = \varphi(v,v)$$

نسمي q الشكل التربيعي المرفق بالشكل الهرميتي φ.

12) نقول عن q المعرف أعلاه إنه شكل تربيعي غير سالب إذا تحقق:

$$\forall v \in V \; ; \; q(v) \geq 0$$

ونقول عن q إنه معرف موجب إذا تحقق:

$$\forall v \in V \; ; \; q(v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

13) التطبيق φ الذي يحقق الشروط السابقة كلها جداء هرميتي ونرمز له بالرمز $<.,.>$ أو $<.|.>$

. ~~كلاً~~ يكون $<.,.> = \varphi$ جداء هرميتي

إذا كان φ شكلاً هرميتياً و $q(v) = \varphi(v,v)$ شكلاً غير سالب و q معرف موجب

14) نسمي الفضاء شعاعياً مزوداً على حقل الأعداد العقدية. نقول عن φ إنه فضاء هرميتي (واحدي) إذا كان مزوداً بدالة جداء هرميتي ونرمز له بالرمز $(V, <.,.>)$

15) ليكن φ فضاءً هرميتياً و $v \in V$ عندئذٍ نعرف نظيم v على أنه العدد غير السالب

$$\|v\| = \sqrt{q(v)} = \sqrt{<v,v>}$$

عدد حقيقي غير سالب

ملاحظة: لا يمكن جذر عدد عقدي
ولا يمكن القول عن عدد عقدي إنه سالب أو موجب

* مبرهنة
ليكن V فضاءً داخلياً عندئذٍ القضايا الثلاث صحيحة:
$\forall \lambda \in F = \mathbb{C} \quad , \quad \forall v, w \in V$

① $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

طويلة

② $|\langle v, w \rangle| \le \|v\| \cdot \|w\|$ كوشي شوارتز

③ $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ المثلث

لنثبت متراجحة المثلث:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle$$
$$= \langle v, v+w \rangle + \langle w, v+w \rangle$$
$$= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle$$
$$= \|v\|^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} + \|w\|^2$$

$$= \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2$$

$\mathrm{Re}\, z \le |z|$

$$\le \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2$$

حسب كوشي شوارتز :

$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2$$

$$= (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$(\|v+w\|)^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\Rightarrow \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

مثال هام :

من اجل الفضاء $V = \mathbb{C}^n$ ، $v, w \in V$

$$v = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

$$w = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$$

اذا لم يذكر جداء هرميتي فاننا نستخدم الجداء الهرميتي القياسي

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z'_i}$$

$$= z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2} + \ldots + z_n \overline{z'_n}$$

حالة خاصة :

من اجل $V = \mathbb{C}^2$ ، $w = (x_2, y_2)$ ، $v = (x_1, y_1)$

$$\langle v, w \rangle = x_1 \overline{x_2} + y_1 \overline{y_2}$$

Scanned by CamScanner

المؤثرات على الفضاءات الاحدية (الواحدية) « الداخل »

التعريف:

ليكن V فضاءً هرميتياً وليكن $f: V \to V$ مؤثر خطي على V عندئذٍ يسمى f هرمتياً.

(المؤثر الخطي مثلاً هرمتي ... مستقر فضاءات هرمتية)

المؤثر القرين:

نقول عن المؤثر $g: V \to V$ انه المؤثر القرين لـ f إذا تحقق $\forall\, v, w \in V$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle$$

ونرمز للمؤثر القرين بالرمز f^* فيصبح:

القياس: $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$

مستمر في حل المسائل

مثال:

ليكن $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$v = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}^2$

$w = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}^2$

المعرف كما يلي:

$$f(v) = f(x, y) = (2ix + y,\; x - iy)$$

ج) اوجد التابع المرافق لـ f :

الحل:

نعلم أن التابع المرافق يعطى كمايلي :

$g = f^* : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$\forall v, w \in \mathbb{C}^2 ; \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$

بما لدينا جداء هرميتي سنستخدم القانون.

$\langle f(v), w \rangle = \langle (2ix_1 + y_1 , x_1 - iy_1), (x_2, y_2) \rangle$

$= (2ix_1 + y_1)(\overline{x_2}) + (x_1 - iy_1)(\overline{y_2})$

$= 2ix_1\overline{x_2} + y_1\overline{x_2} + x_1\overline{y_2} + - iy_1\overline{y_2}$

$= x_1(2i\overline{x_2} + \overline{y_2}) + y_1(\overline{x_2} - i\overline{y_2})$

$= x_1(\overline{-2ix_2 + y_2}) + y_1(\overline{x_2 + iy_2})$

$= \langle (x_1, y_1), (-2ix_2 + y_2 , x_2 + iy_2) \rangle$

$= \langle v, f^*(w) \rangle$

$\Rightarrow f^*(w) = f^*(x_2, y_2) = (-2ix_2 + y_2 , x_2 + iy_2)$

انتهت المحاضرة ٢٥

إعداد: ناريمان حلو

محمد أنس الغزال

[illegible] 2021