حساب أطوال المنحنيات:

ديكارتياً:

ليكن $y=F(x)$

طول المنحني $y=F(x)$ بين

$x=a$ $\quad$ $x=b$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

وسيطياً:

ليكن المنحني $x=x(t)$

$y=y(t)$

وسيط t

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$$

قطبياً:

$r=r(\theta)$

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

مثال:

1) احسب طول قوس منحني التالي

$y^2=x^3$

$0\le x\le 4$

لإيجاد y' نشتق

$2yy'=3x^2$

$y'=\dfrac{3x^2}{2y}$

$y'^2=\dfrac{9x^4}{4y^2}$

$y'^2=\dfrac{9}{4}\,\dfrac{x^4}{x^3}$

$y'^2=\dfrac{9}{4}x$

$$L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;dx$$

$$=\frac{4}{9}\int_0^4\frac{9}{4}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

مثال 2: احسب طول قوس المنحني

$x=\sqrt{3}\,t^2$

$y=t-t^3$

$t\in\mathbb{R}$

حيث $0\le t\le 1$

$x'_t=2\sqrt{3}\,t$

$x'^2_t=12t^2$

$y'_t=1-3t^2$

$y'^2_t=(1-3t^2)^2$ نفك المطابقة

$=1-6t^2+9t^4$

$$L=\int_0^1\sqrt{12t^2+1-6t^2+9t^4}\;dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{9t^4+6t^2+1}\;dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{(3t^2+1)^2}\;dt$$

نكمل...

مثال: احسب طول قوس المنحني

$r = 2a(1-\cos\theta)$

حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

$r^2 = 4a^2(1-\cos\theta)^2$

$= 4a^2(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)$

$r' = 2a\sin\theta$

$r'^2 = 4a^2\sin^2\theta$

$r^2 + r'^2 = 4a^2(\sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= 4a^2(2-2\cos\theta)$

$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2(2-2\cos\theta)}\, d\theta$

$= 2\sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$

$= 2\sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$

نكمل .....

احسب محيط الدائرة بطريقة قطبية وديكارتية.

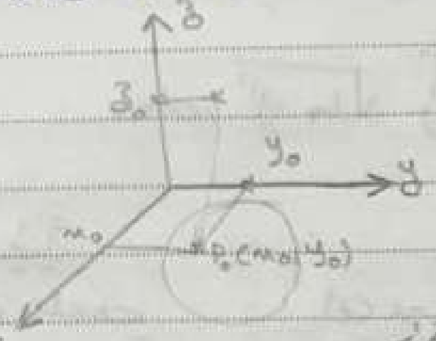
التكامل الثنائي:

التابع بمتحولين:

هو تابع منطلقه $\mathbb{R}^2$ ومستقره $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$



استمرار

$f(x,y)$ مستمر عند $P_0(x_0,y_0)$

$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ (x,y)\to(x_0,y_0)}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

اشتقاق:

$\lim \dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{(x,y)-(x_0,y_0)} = 0$

$f(x,y)$ قابل للاشتقاق عند (x_0,y_0)

المشتق الكلي: (مشتق جزئي)

$dF(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$

مثال:

أوجد منطقة تعريف التابع

$F(x,y) = \ln|1-x^2-y^2|$ حيث

ما داخل الـ ln أكبر تماماً من الصفر

$1 - x^2 - y^2 > 0$

$-x^2 - y^2 > -1$

$x^2 + y^2 < 1$ قرص دائري بدون محيط

داخل القرص الدائري

Scanned by CamScanner

أوجد منطقة تعريف التابع

$f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$

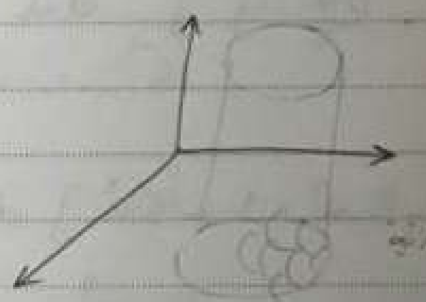
$1-(x^2+y^2)\geq 0$

$1\geq x^2+y^2$

$x^2+y^2\leq 1$

القرص الدائري مع محيطه.

تعريف التكامل الثنائي.



الارتفاع z

$\sum f(x,y)\,.\,\Delta S_i$

- ليكن التابع $z=f(x,y)$ معرف في المنطقة D ← تمثل منطقة تعريف $f(x,y)$

نعرف التكامل الثنائي لـ $f(x,y)$ في D

$$\iint_D f(x,y)\,ds$$

حيث S مساحة المنطقة D

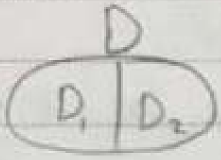
خواص التكامل الثنائي:

1- $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,ds = \iint_D f(x,y)\,ds+\iint_D g(x,y)\,ds$

2- $\iint_D k\,f(x,y)\,ds = k\iint_D f(x,y)\,ds$

حيث K ثابت.

3- (والأهم)



$$\iint_D f(x,y)\,ds=\iint_{D_1} f(x,y)\,ds+\iint_{D_2} f(x,y)\,ds$$

حيث

$D_1\cap D_2=\Phi \qquad D_1\cup D_2=D$

4- نتائج التكامل الثنائي هو عدد

حساب التكامل الثنائي:

ليكن $z=f(x,y)$ معرف في المنطقة D

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$

تمثل شكل رباعي

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_a^b\underbrace{\int_c^d F(x,y)\,dy}\,dx$$

نكامل أول شي بالنسبة لـ dy ومن بعدها dx

$$=\int_c^d\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}\,dy$$

تكامل الثنائي نفس العدد

x توابع - y أعداد

١) احسب قيمة التكامل

$$\iint_D (1-6x^2y)\, ds$$

حيث

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ 0\le x\le 2 ,\ -1\le y\le 1\}$$

$$\int_0^2\int_{-1}^{1} (1-6x^2y)\, dy\, dx$$

بالنسبة لـ y و الـ x تبقى ثابتة

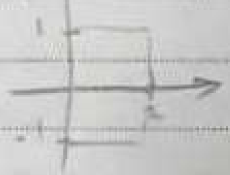
$$=\int_0^2 \left[y-\frac{6x^2}{2} y^2 \right]_{-1}^{1} dx$$

$$=\int_0^2 \left[1-3x^2+1+3x^2 \right] dx$$

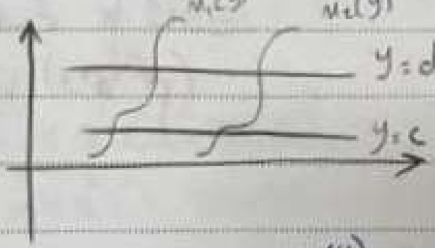
$$=\int_0^2 2\, dx = 2\left[x\right]_0^2 = 4$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_0^2 (1-6x^2y)\, dx\, dy$$

لازم نطلع نفس الجواب



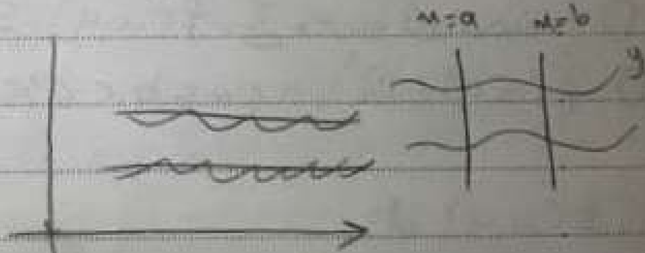
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$
$$c\le y\le d$$



$$\iint_D f(x,y)\, ds = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

منطقة بسيطة بالنسبة لـ x

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ a\le x\le b$$
$$y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$



$$\iint_D f(x,y)\, ds = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy\, dx$$

منطقة بسيطة بالنسبة لـ y

وإذا لم تكن بسيطة بالنسبة لـ x ولا بالنسبة لـ y نقسمها الى مجموع مناطق بسيطة.

مثال:

$$\iint_D f(x,y)\,ds$$

$$Z = f(x,y) = 4$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$$

$$\int_0^2\int_0^3 4\,dy\,dx$$

$$\int_0^3\int_0^2 4\,dx\,dy = 24$$

تكمل ـــــ

مثال:

$$\iint_D f(x,y)\,ds$$

$$Z = f(x,y) = 2 - x - y$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

$$\int_0^1\int_0^1 (2-x-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(2x - \frac{x^2}{2} - xy\right)_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{2} - y\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - y\right) dy$$

$$= \left(\frac{3}{2}y - \frac{y^2}{2}\right)_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$\iint_D f(x,y)\,ds$$

$$f(x,y) = 1$$

و D هي المنطقة المحصورة بالمنحنيين

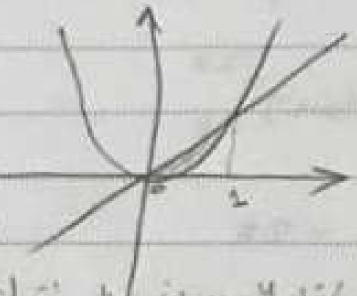
$$y_1 = x^2 \qquad y = x$$

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 = x$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 1$$



$0 \le x \le 1$

$x^2 \le y \le x$

لازم نبدأ بالمتغير

كامل اول بالنسبة لـ y وبعدين بالنسبة لـ x

$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} 1\,dy\,dx =$$

بالنسبة لـ y لأن y هي في حدودها متغيرات

$$\int_0^1 (y)_{x^2}^{x}\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)\,ds$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

$$\iint_D f(x,y)\,ds$$

$$f(x,y) = x \cdot y$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi} (\sin x + \cos y)\, dx\, dy$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \left[-\cos x + x\cos y\right]_0^{\pi} dy$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \left[2 + \pi \cos y\right] dy$$

$$= \left[2y + \pi \sin y\right]_{\pi}^{2\pi}$$

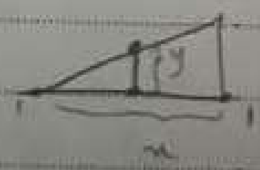
$$= 4\pi - 2\pi = 2\pi$$

$$\iint_D (3 - x - y)\, ds$$

$$D = \{(x,y) : \quad y = x \quad x = 1\}$$

$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le x$



$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} (3 - x - y)\, dy\, dx$$

المقرر في المحاضرة السابقة هو طول المقوس وأعطته الدكتورة في هذه المحاضرة

فريق: ٭رياضيات

اعداد الطالبة

راما رجب