حل أسئلة الدورات

6 دورات

" دورة الفصل الثاني 2015 "

السؤال الأول : 1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية .

2) ادرس حركة النقطة المادية كتلتها m على منحن بوجود احتكاك .

السؤال الثاني : في لحظة وقف محرك زورق كانت سرعته v_0 يتعرض هذا الزورق لمقاومة من الماء تساوي $R = -\alpha x' - \beta x'^2$ حيث α, β ثوابت موجبة .

1) برهن أن الزورق لن يتوقف ابداً .

2) ماهي الفترة الزمنية اللازمة حتى تصبح سرعة الزورق مساوية $\frac{v_0}{3}$

السؤال الثالث : علق في الطرف السفلي B لنابض شاقولي جسم وزنه P أما الطرف الاخر A للنابض فمثبت في موضع A يزداد طول النابض بمقدار δ نتيجة لتعليق الجسم عند توازنه وتهمل مقاومة الوسط .

أوجد قانون الحركة الاهتزازية لهذا الجسم اذا ترك يسقط دون سرعة ابتدائية .

السؤال الرابع : M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المسار $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ وتخضع لقوة من الشكل $\vec{F} = mk(y\vec{i} + xy\vec{j})$ هل القوة كمونية وإذا كانت كمونية أوجد تكامل الطاقة للنقطة M مع العلم ان a, k ثوابت .

انتهت الأسئلة ☺

" ^_^ الحل "

السؤال الأول : 1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية .

الحل

1) انطلاقاً من معادلة التحريك الاساسية النسبية $m\overrightarrow{\Gamma_r} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{J_e} + \overrightarrow{J_c}$

إن معادلة التحريك في الحركة النسبية لا تختلف عن معادلة التحريك في الحالة العامة $m\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{F}$ إلا بإضافة الحدين $(\overrightarrow{J_e}, \overrightarrow{J_c})$

فإذا أخذنا كمية الحركة $d(mv) = F.dt \quad ;(v = v_a)$

أما كمية الحركة النسبية $d(mv) = F.dt + J_e.dt + J_c.dt \quad ;(v = v_r)$

كذلك في الطاقة الحركية $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr \quad ;(v = v_a)$

وفي حالة الطاقة الحركية النسبية $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + J_e.dr + J_c.dr$

لدينا : $J_c.dr = (-m\Gamma_c)dr = -2m(\omega \times v_r)dr = -2m\left(\omega \times \frac{dr}{dt}\right)dr = 0$

لأن $(\frac{dr}{dt}, dr)$ شعاعان متوازيان

وأصبحت لدينا نظرية الطاقة الحركية $\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \overrightarrow{F}.dr + \overrightarrow{J_e}.dr}$

وهي عبارة عن الطاقة الحركية للحركة النسبية.

2) ادرس حركة النقطة المادية كتلتها m على منحن بوجود احتكاك .

عندما تتحرك نقطة مادية M على منحني ثابت فإن رد الفعل لن يكون ناظمياً بشكل عام أي أن رد الفعل يصنع زاوية مع المستوي الناظمي تدعى " زاوية الاحتكاك " وبذلك يكون لرد الفعل مركبتان مركبة مماسية $\overrightarrow{R_\tau}$ وأخرى ناظمية $\overrightarrow{R_N}$ موجودة في المستوي الناظمي للمنحني في تلك النقطة ويمكن تفريق المركبة $\overrightarrow{R_N}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{R_n}$ محمولة على الناظم الاساسي والثانية $\overrightarrow{R_b}$ محمولة على ثنائي الناظم

وبالتالي فإن قانون الحركة يعطى بالعلاقة $m\,\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{F}$

وبإسقاط العلاقة السابقة نجد :

بالإسقاط على $\vec{\tau}$ نجد

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau + R_\tau \dots\dots(1)$$

بالإسقاط على $\vec{n}$ نجد

بالإسقاط على $\vec{b}$ نجد

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + R_n \dots (*) \\ 0 = F_b + R_b \dots (**) \end{array}\right.$$

إن المعادلة (1) تعطينا معادلات الحركة ، والعلاقة (2) تعطينا ردود الافعال .

نعلم ان $\vec{R_\tau}$ يعاكس اتجاه الحركة وقيمته المطلقة اثناء الحركة تساوي $|R_\tau| = f|R_N|$
حيث f يدعى معامل الاحتكاك وبالتالي نستطيع أن نكتب المعادلة (1) بالشكل :

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau - f|R_N| \dots.(\$)$$

طويلة المركبة الناظمية $|R_N| = \sqrt{R_n^2 + R_b^2}$

من المعادلة $(*)$ نجد... $R_n = \frac{mv^2}{\rho} - F_n \Rightarrow R_n^2 = \left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2$

من المعادلة $(**)$ نجد... $R_b = -F_b \Rightarrow R_b^2 = F_b^2$

بتعويض بطويلة المركبة الناظمية... $|R_N| = \sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2}$

ومنه بتعويضها بالعلاقة ($) نجد ...

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = F_\tau - f\sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2}}$$

وفي حالة خاصة عندما يكون المنحني مستقيماً فإن $F_b // F_n$ وكذلك $\rho = 0$ عندئذٍ :

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau$$

وفي حالة كون المنحني مستوياً ومحصلة القوة المؤثرة على النقطة المادية واقعة في هذا المستوي فإن معادلات الحركة تبسط إلى الشكل :

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau - f\sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F_\tau - f.R_n$$

السؤال الثاني : في لحظة وقف محرك زورق كانت سرعته v_0 يتعرض هذا الزورق لمقاومة من الماء تساوي $R = -\alpha x' - \beta x'^2$ حيث α, β ثوابت موجبة .

1) برهن أن الزورق لن يتوقف ابداً .

2) ماهي الفترة الزمنية اللازمة حتى تصبح سرعة الزورق مساوية $\frac{v_0}{3}$

الحل

1) انطلاقاً من قانون التحريك الاساسي : $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$

بالإسقاط على المحور ox نجد ..... $-\alpha x' - \beta x'^2 = mx''$

$$mx'' + \alpha x' + \beta x'^2 = 0 \Longrightarrow x'' + \frac{\alpha}{m}x' + \frac{\beta}{m}x'^2 = 0$$

بفرض أن $\left(\left(\frac{\alpha}{m} = k \quad , \quad \frac{\beta}{m} = P\right)\right)$ نجد ... $x'' + kx' + Px'^2 = 0$

بالتقسيم على x' نجد : $\frac{x''}{x'} + k + Px' = 0 \Longrightarrow \frac{x''}{x'} + Px' = -k$

بمكاملة الطرفين نجد : $\ln|x'| + px = -kt + \ln|c| \Longrightarrow e^{\ln|x'|+Px} = e^{-kt+\ln|c|}$....

بتقسيم على e^{Px} نجد ... $\boxed{x' = c.e^{-kt-Px}}$

لإيجاد الثابت $((c))$ من شروط البدء $((x' = v_0 \;, x = x_0 \;, \; t = 0\;))$ نجد :

$$v_0 = c.e^{-px_0} \Longrightarrow c = v_0.e^{px_0}$$

نلاحظ أن $x' = v_0.e^{px_0}.e^{-kt-Px} \Longrightarrow x' = v_0.e^{-kt-P(x-x_0)} > 0$ اي أنه **لن يتوقف** .

2) لحساب الزمن من العلاقة ...

$$x' = v_0.e^{-kt-P(x-x_0)} \Longrightarrow v = v_0.e^{-kt-P(x-x_0)}$$

$$\frac{v_0}{3} = v_0.e^{-kt-P(x-x_0)} \Longrightarrow \frac{1}{3} = e^{-kt-P(x-x_0)} \Longrightarrow \ln\left|\frac{1}{3}\right| = -kt - P(x-x_0)$$

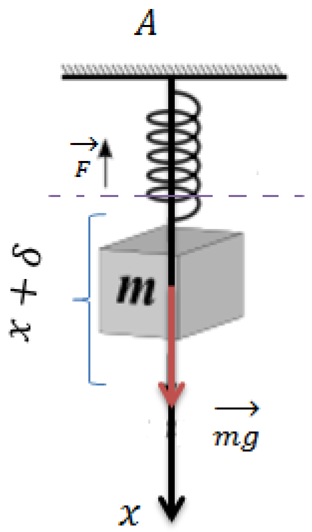
$$-\ln|3| = -kt - P(x-x_0) \Longrightarrow kt = \ln|3| - P(x-x_0)$$

$$\boxed{t = \frac{\ln|3| - P(x-x_0)}{k}}$$

وهي الفترة الزمنية لتصل سرعة القارب إلى $\frac{v_0}{3}$

السؤال الثالث : علق في الطرف السفلي B لنابض شاقولي جسم وزنه P أما الطرف الاخر A للنابض فمثبت في موضع A يزداد طول النابض بمقدار δ نتيجة لتعليق الجسم عند توازنه وتهمل مقاومة الوسط
أوجد قانون الحركة الاهتزازية لهذا الجسم اذا ترك يسقط دون سرعة ابتدائية .

الحل



لنأخذ المحور ox شاقولياً متجهاً نحو الاسفل أما مبدأ القياس عليه فتؤخذ نقطة تعليق الجسم بالنابض في حال توازن الجسم عندما يكون الجسم معلقاً .

إن القوى المؤثرة على الجسم هي :

$P = mg$ قوة الثقل ، وقوة F تتناسب مع مقدار استطالة النابض $F = -c|\Delta l| \quad ; \quad \Delta l = (x+\delta)$

حيث F هي القوة المرجعة للنابض و δ مقدار تغير حركة x من موضع سكون نابض و Δl الاستطالة النابض و c ثابت صلابة النابض .

ومنه حسب قانون التحريك الاساسي نجد : $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{\Gamma} \Longrightarrow \vec{F} = m\vec{\Gamma}$

وبالإسقاط نجد : $mx'' = m.g - c(\delta + x) \Longrightarrow mx'' = P + F$

$$mx'' = m.g - c\delta - cx$$

ولكن في هذه الحالة يكون لدينا دوماً $m.g = c\delta$ ((وقد تم الشرح بالتفصيل في المحاضرة السادسة))

$$-cx = mx'' \Longrightarrow mx'' + cx = 0 \Longrightarrow x'' + \frac{c}{m}x = 0$$

بتعويض(($\frac{c}{m} = k^2$)) نجد: $\boxed{x'' = -k^2 x \dots\dots (*)} \Longleftarrow x'' + k^2 x = 0$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة وبدون طرف ثاني تقبل حل من الشكل ..

$$x = c_1 e^{\Lambda_1 t} + c_2 e^{\Lambda_2 t}$$

لإيجاد الحل العام نفرض الحلول الخاصة من الشكل: $x = e^{\Lambda t}$

نوجد x'' ونعوضها في $(*)$.... $x' = \Lambda e^{\Lambda t} \Longrightarrow x'' = \Lambda^2 e^{\Lambda t}$

فنجد : $e^{\Lambda t}(\Lambda^2 + k^2) = 0 \qquad \Lambda^2 e^{\Lambda t} + k^2 e^{\Lambda t} = 0$

ومنه المعادلة المميزة هي ... $\Lambda^2 + k^2 = 0$

وجذرها $\lambda_2 = ik \quad , \quad \lambda_1 = -ik$ حيث λ_1, λ_2 جذور المعادلة المميزة

نعوض λ_1, λ_2 بالمعادلة التفاضلية.. $\qquad x = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}$

نعلم أن: $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt \quad \&\& \quad e^{-ikt} = \cos kt - i \sin kt$

$$x = (c_1 \cos kt + c_1\, i \sin kt) + (c_2 \cos kt - c_2\, i \sin kt)$$

$$x = (c_1 + c_2) \cos kt + (c_1 - c_2) i \sin kt$$

بفرض $(c_1 + c_2) = A \quad \&\& \quad (c_1 - c_2) i = B$

فتصبح.. $\boxed{x = A \cos kt + B \sin kt} \ldots\ldots (1)$

إذا أخذنا شروط البدء باللحظة $((x = x_0 \ , x' = v_0 \ , t = 0))$

نشتق العلاقة (1) ... $\qquad x' = -Ak \sin kt + Bk \cos kt$

$$x_0 = A \ , v_0 = Bk \Rightarrow B = \frac{v_0}{k}$$

$$\boxed{x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt}$$

وهي معادلة الحركة الاهتزازية التوافقية

وبتعويض شروط البدء من المسألة $((x_0 = -\delta \ , x' = 0 \ , t = 0))$ نجد:

$$\boxed{x = -\delta \cos kt}$$

وهو قانون حركة الجسم

السؤال الرابع : M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المسار $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ وتخضع لقوة من الشكل $\vec{F} = mk(y\vec{i} + xy\vec{j})$ هل القوة كمونية وإذا كانت كمونية أوجد تكامل الطاقة للنقطة M مع العلم ان a, k ثوابت .

الحل

القوة المؤثرة : هي قوة الثقالة $p = mg$ والقوة الجاذبة $\vec{F} = mk(y\vec{i} + xy\vec{j})$

قوة الثقالة كمونية لأن من المعلوم أن في منطقة معينة بالقرب من سطح الأرض (صغيرة بالنسبة للكرة الأرضية)

يمكن اعتبار قوة الثقالة هي $p = mg$ ثابتة بالشدة والاتجاه

وبالتالي إذا أخذنا جملة المحاور الاحداثية فيها oz شاقولي صاعد

وبالتالي فإن مساقط قوة الثقالة

$$F_x = 0 \;,\; F_y = 0 \;, F_z = -mg$$

من أجل الاثبات أن القوة كمونية يجب تحقق الشروط التالية :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

الشروط محققة .

ومنه : $u = \int F\,.dr \Longrightarrow u = -\int mg\,.dz$

$\boxed{u = -mgz}$ وهو تابع الكمون(القوة الثقالية)

أما بالنسبة للقوة $\vec{F}$ بالإسقاط نجد :

$$F_x = -mky \quad , \quad F_y = -mkxy \quad , \quad F_z = 0$$

لكي تكون القوة كمونية يجب ان تحقق الشروط التالية :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

لكن نلاحظ هنا أن القوة غير كمونية لأن :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = mk \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = myk \Longrightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

وبالتالي نتوقف عن الحل.

" انتهى حل الدورة "

" دورة التكميلي 2015 "

السؤال الأول : برهن أنه إذا كان الارتباط مثالياً ولا يتعلق بالزمن بشكل مباشر فإن نظرية الطاقة الحركية تبقى محتفظة على شكلها التي تأخذه من أجل النقطة الطليقة .

السؤال الثاني : AB قضيب طوله $2l$ مهمل الكتلة يتحرك في الفضاء بحيث تنزلق نهايته A بدون احتكاك على المستوي الافقي oxy اما نهايته B فتنزلق بدون احتكاك على المحور الشاقولي oz ،
M نقطة مادية كتلتها m متوضعة في مركز ثقل القضيب . والمطلوب :
اكتب معادلة الطاقة الحركية للنقطة M .

السؤال الثالث : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك وفق المعادلات:

$$x = a\,cos(\omega t) \quad , \quad y = b\,sin(\omega t)$$

حيث: $(a\,,b\,,\omega)$ ثوابت.

والمطلوب: **أوجد مسار النقطة والقوى المؤثرة على النقطة المادية M**

السؤال الرابع : M نقطة مادية تتحرك على المستقيم oA بالسرعة v ،المستقيم oA يدور حول o في المستوي x,y بسرعة زاوية مقدارها ω .
أوجد سرعة النقطة المادية M بالنسبة للمستوي بدلالة $\overrightarrow{oM} = \vec{r}$

انتهت الأسئلة ☺

" الحل ^_^ "

السؤال الأول : برهن أنه إذا كان الارتباط مثالياً ولا يتعلق بالزمن بشكل مباشر فإن نظرية الطاقة الحركية تبقى محتفظة على شكلها التي تأخذه من أجل النقطة الطليقة .

الحل

يمكن معالجة النقطة المقيدة كنقطة طليقة فيما إذا اعتبرنا أن هنالكَ قوى أُخرى غير القوى الخارجية المطبقة على هذه النقطة كقوى ردود الأفعال وبناءً على ذلك يمكن ان نطبق جميع نظريات التحريك التي طبقت على حركة نقطة طليقة .

وبالتالي حسب نظرية الطاقة الحركية يكون لدينا :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + \lambda_1\, grad\, f_1.dr + \lambda_2\, grad\, f_2.dr$$

وبما أن

$$grad\, f_1\, dr = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz$$

$$grad\, f_2\, dr = \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz$$

فإن معادلتي الارتباط $f_1(x,y,z,t) = 0$ $f_2(x,y,z,t) = 0$ تحقق هذه العلاقتين :

$$\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz} + \frac{\partial f_1}{\partial t}dt = 0 \quad , \quad \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz} + \frac{\partial f_2}{\partial t}dt = 0$$

ومنه نجد أن :

$$grad\, f_1 dr = -\frac{\partial f_1}{\partial t}dt \quad , \quad grad\, f_2 dr = -\frac{\partial f_2}{\partial t}dt$$

نعوض في نظرية الطاقة الحركية فنحصل على:

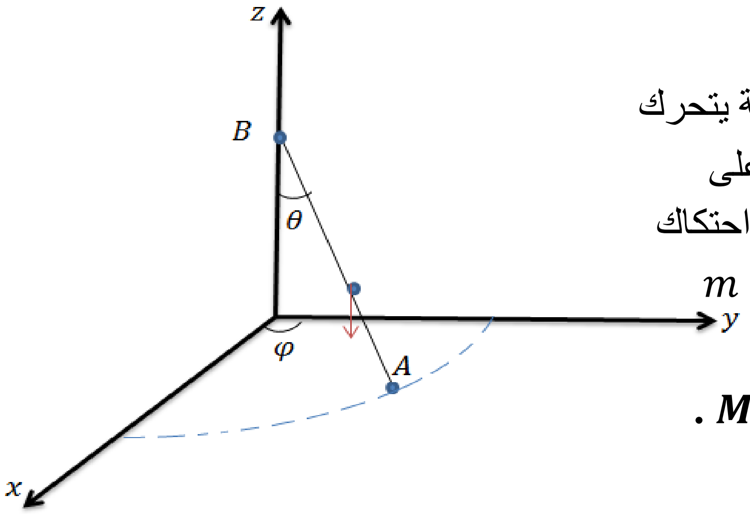
$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t}dt - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t}dt}$$

وهي معادلة نظرية الطاقة الحركية لنقطة مقيدة على منحني.

أمّا إذا كان الارتباط لا يتعلق بالزمن بشكل مباشر فإن: $\frac{\partial f_2}{\partial t}=0 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial t}=0$

فتصبِح العلاقة على الشكل التالي: $\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=F.dr}$

وهيَ معادلة نظرية الطاقة الحركية لنقطة طليقة.



السؤال الثاني: AB قضيب طوله $2l$ مهمل الكتلة يتحرك في الفضاء بحيث تنزلق نهايته A بدون احتكاك على المستوي الأفقي oxy اما نهايته B فتنزلق بدون احتكاك على المحور الشاقولي oz ، M نقطة مادية كتلتها m متوضعة في مركز ثقل القضيب.

والمطلوب : اكتب معادلة الطاقة الحركية للنقطة M .

الحل

نأخذ جملة الإحداثيات الكروية

$$x=l\cos\varphi\sin\theta\ ,y=l\sin\varphi\sin\theta\ ,z=l\cos\theta\ \ldots.(\$)$$

نشتق المعادلات ($) فنجد :

- $x'=l\cos\varphi\cos\theta\,.\,\theta'-l\sin\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'$
  $y'=l\ \sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta'+l\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'$
  $z'=-l\sin\theta\,.\,\theta'$

ونعلم أن معادلة الطاقة الحركية هي $T=\frac{1}{2}mv^2$

$$\overrightarrow{oM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\Rightarrow\vec{v}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$$
$$oM=l\cos\varphi\sin\theta+l\sin\varphi\sin\theta+l\cos\theta$$
$$\Rightarrow v=(oM)'=l\cos\varphi\cos\theta\,.\,\theta'-l\ \sin\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'$$
$$+l\ \sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta'+l\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'-l\sin\theta\,.\,\theta'$$

$$\Rightarrow v^2=(l\cos\varphi\cos\theta\,.\,\theta'-l\ \sin\varphi\sin\theta\,.\,\varphi')^2$$
$$+(l\ \sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta'+l\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi')^2+(-l\sin\theta\,.\,\theta')^2$$

بفك التربيع نجد :

$$\Longrightarrow v^2 = l^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\,.\theta'^2 - 2l^2.\cos\varphi\sin\theta\,.\theta'.\sin\varphi\cos\theta\,.\varphi'$$
$$+l^2\ \sin^2\varphi\, sin^2\theta\,.\varphi'^2 + l^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\,.\theta'^2$$
$$+2l^2.\sin\varphi\cos\theta\,.\theta'.\cos\varphi\sin\theta\,.\varphi' + l^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\,.\varphi'^2 + l^2\sin^2\theta\,.\theta'^2$$

بالإصلاح والمطابقة نجد :

$$\Longrightarrow v^2 = l^2\left[\cos^2\varphi\cos^2\theta\,.\theta'^2 + \sin^2\varphi\cos^2\theta\,.\theta'^2\right]$$
$$+l^2[\sin^2\varphi\, sin^2\theta\,.\varphi'^2 + \cos^2\varphi\sin^2\theta\,.\varphi'^2] + l^2\sin^2\theta\,.\theta'^2$$

$$\Longrightarrow v^2 = l^2.\theta'^2[\cos^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)]$$
$$+l^2.\varphi'^2[sin^2\theta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)] + l^2\sin^2\theta\,.\theta'^2$$

$$\Longrightarrow v^2 = l^2.\theta'^2(\cos^2\theta + sin^2\theta) + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{v^2 = l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta}$$

وجدنا سابقاً أن $p = mg$ هي قوة كمونية ويكون

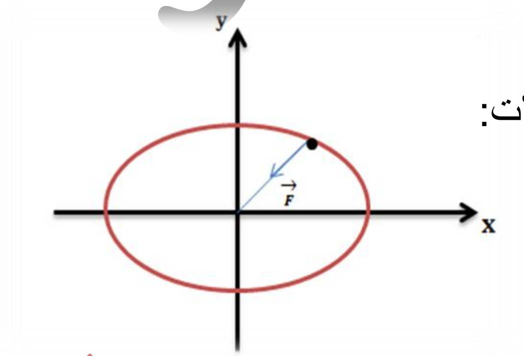
$$u = \int p\;.dr \Rightarrow u = \int mg\;.dz \Rightarrow u = mgz$$
$$u = l.mg.\cos\theta$$

نعوض في قانون تكامل الطاقة الحركية $\boxed{T = u + h}$

$$\frac{1}{2}m\left(l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta\right) = l.mg.\cos\theta + h$$

بالتقسيم على m نجد :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta\right) = l.g.\cos\theta + h_1 \qquad ; h_1 = \frac{h}{m}}$$



السؤال الثالث : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك وفق المعادلات:

$$x = a\cos(\omega t) \qquad , \qquad y = b\,sin(\omega t)$$

حيث: $(a\,,b\,,\omega)$ ثوابت.

والمطلوب: أوجد مسار النقطة والقوى المؤثرة على النقطة المادية M

الحل

لإيجاد مسار النقطة المادية نتخلص من الزمن:

نربع المعادلة x ونقسم الطرفين على a^2 $\qquad x^2 = a^2 \cos^2(\omega t)$

نربع المعادلة y ونقسم الطرفين على b^2 $\qquad y^2 = b^2 \sin^2(\omega t)$

فنجد :

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2(\omega t) \quad , \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2(\omega t)$$

تذكرة

$$1 = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)$$

بجمع المعادلتين التاليتين :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

مسار النقطة المادية هي معادلة لقطع ناقص

وبالتالي النقطة المادية تتحرك على القطع الناقص.

لإيجاد القوة المؤثرة على النقطة المادية:

حسب قانون التحريك الاساسي : $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$

ومنه $\qquad \vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$

$$F_x = m\,x'' \quad , \quad F_y = m\,y''$$

$$x' = -a\omega \sin \omega t \Longrightarrow x'' = -a\omega^2 \cos \omega t \xRightarrow{\text{نعوض قيمة x}} x'' = -x\,\omega^2$$

$$y' = b\omega \cos \omega t \Longrightarrow y'' = -b\omega^2 \sin\ \omega t \xRightarrow{\text{نعوض قيمة y}} y'' = -y\,\omega^2$$

$$z' = z'' = 0$$

$$F_x = -mx\,\omega^2 \ldots.(1) \quad , \quad F_y = -my\,\omega^2 \ldots.(2) \quad ,$$

نعوض كل من (1) و (2) ب (*) ونجمع

$$\vec{F} = -m\omega^2 x\,\vec{\imath} - m\omega^2 y\,\vec{\jmath} \Longrightarrow \vec{F} = -m\omega^2(\underbrace{x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}}_{\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}}$$

إن $\overrightarrow{F}$ القوة المؤثرة على النقطة سالبة لأنها جاذبة و $\vec{r}$ نصف القطر الشعاعي .

السؤال الرابع : M نقطة مادية تتحرك على المستقيم oA بالسرعة v ، المستقيم oA يدور حول o في المستوي x, y بسرعة زاوية مقدارها ω .

أوجد سرعة النقطة المادية M بالنسبة للمستوي بدلالة $\overrightarrow{oM} = \vec{r}$

الحل

لنأخذ في المستوي oxy المحورين x, y مبدأهما o ان حركة النقطة M على المستقيم (oA) حركة نسبية وسرعتها سرعة نسبية $(\ v_r\ )$ على هذا المستقيم هي السرعة النسبية لهذه النقطة .

الحركة الدورانية للمستقيم (oA) هي حركة جرية للنقطة M وسرعة تلك النقطة من المستقيم $(\ oA)$ التي تنطبق على M في اللحظة t تكون عبارة عن السرعة الجرية للنقطة M .

إن وضع النقطة M على المستقيم $(\ oA\ )$ يتحدد بالمقدار $\boxed{oM = r}$ وهي تتحرك على دائرة نصف قطرها $(\ r\ )$ ((بالحركة الجرية)) مقدار سرعتها الجرية $\boxed{v_e = \omega \times r}$ { لأنها عامودية على المحور $(\overrightarrow{oM})$ }

لدينا السرعة المطلقة $v_a = v_r + v_e$ وبالتالي نأخذ الطويلة :

$$\boxed{v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e . v_r . cos\varphi}}$$

وبملاحظة تعامد السرعتين النسبية والجرّية $((cos\varphi = 0))$

نجد السرعة المطلقة هي $v_a = \sqrt{\omega^2 r^2 + v_r^2}$

" انتهى حل الدورة "

" دورة الفصل الأول 2016 "

السؤال الأول : برهن أن المشتق الزمني للعزم الحركي لنقطة مادية بالنسبة لمركز ما يساوي مجموع عزوم القوى المؤثرة على هذه النقطة بالنسبة لهذا المركز .

السؤال الثاني : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد $F = -m\,\frac{k^2}{x^3}$.

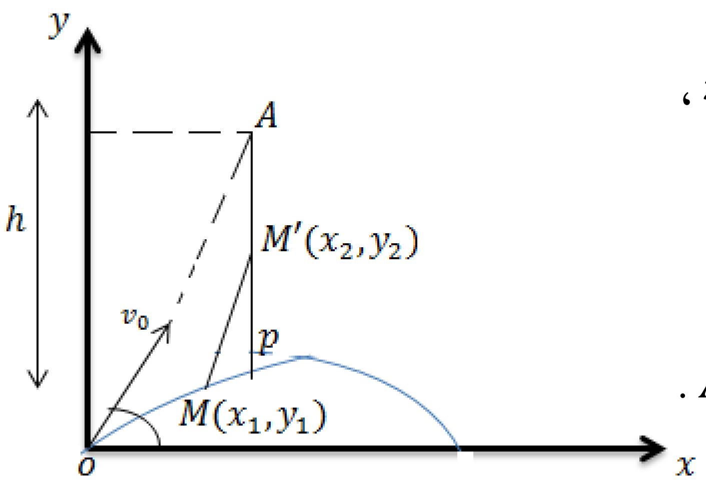
1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء:

$$t = 0 \quad , \quad x = a \quad , \quad x' = 0$$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة للموضع o (مركز الإحداثيات) ؟

السؤال الثالث : يدور إلكترون حول نواة ذرة بمسار دائري وبسرعة ثابتة v، أثرنا على هذا الإلكترون بقوة مماسة لمساره.

والمطلوب: تعيين السرعة الواجب تطبيقها على الإلكترون لكي يفلت من جذب النواة.



السؤال الرابع : في مستوي شاقولي OXY توجد نقطة ، معرفة بترتيبها $AOX = \alpha$ و M نقطة مادية كتلتها m. في لحظة واحدة قذفت النقطة M من o وفق OA وسرعة ابتدائية v_0 ثم تركت نقطة مادية أخرى M' كتلتها m' تسقط بدون سرعة ابتدائية من A .

برهن أن المتحركين يتلاقيان في نقطة واحدة مثل P وأن المستقيم MM' يبقى موازيا لاستقامة مفروضة ثم احسب طول هذا المستقيم

انتهت الأسئلة ☺

" ^_^ الحل "

السؤال الأول : برهن أن المشتق الزمني للعزم الحركي لنقطة مادية بالنسبة لمركز ما يساوي مجموع عزوم القوى المؤثرة على هذه النقطة بالنسبة لهذا المركز .

إذا كانت M نقطة مادية كتلتها m وسرعتها $\vec{v}$ ، وبفرض لدينا نقطة O ثابتة في الفراغ فإن عزم كمية الحركة هو العزم الحركي للنقطة M حول O وهو : $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\rho}$

حيث $\vec{\rho}$ هو شعاع كمية الحركة وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نجد :

الجداء الخارجي لهما يساوي الصفر لأنهما على حامل واحد (مرتبطين خطيا) اي أنه :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{\rho} = \vec{v} \wedge \vec{\rho} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{oM} \wedge \vec{\rho}\right) \Longrightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt} \wedge \vec{\rho}\right) + \left(\overrightarrow{oM} \wedge \frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \left(\underline{\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt} \wedge m\vec{v}}\right) + \left(\overrightarrow{oM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{0} + \overrightarrow{oM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{oM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$

السؤال الثاني : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد $F = -m\frac{k^2}{x^3}$.

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء:

$$t = 0 \quad , \quad x = a \quad , \quad x' = 0$$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة للموضع o (مركز الإحداثيات) ؟

الحل

حسب قانون التحريك الأساسي $m\,\vec{\Gamma} = \sum \vec{F} \Longrightarrow m\,\vec{\Gamma} = \vec{F} + \overrightarrow{mg} + \vec{R}$

بالإسقاط على المحور (ox).. $m\,x'' = -m\,\frac{k^2}{x^3} - mg + R \quad ; R = mg \Longrightarrow \boxed{x'' = -\frac{k^2}{x^3}}$

تنعدم $\overrightarrow{mg} = \vec{R}$ بسبب الفعل ورد الفعل على المحور ox

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ولنحل هذه المعادلة نضرب الطرفين بـ $2x'$:

$$2\,x'\,x'' = -\frac{2x'\,k^2}{x^3}$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة للزمن نجد :

$$\int 2\,x'\,x''.dt = \int -\frac{2x'\,k^2}{x^3}\,.dt$$

تذكرة : $\int f'(t).f^n(t).dt \;=\; \frac{f^{n+1}(t)}{n+1} + c_1$

$$x'^2 = \frac{k^2}{x^2} + c_1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

لتعيين c_1 من شروط البدء $((t = 0 \quad x = a \quad x' = 0\,))$

بالتعويض في (1) نحصل على: $c_1 = -\frac{k^2}{a^2}$ $\Longleftarrow$ $0 = \frac{k^2}{a^2} + c_1$

ومنه: $x'^2 = \frac{k^2}{x^2} - \frac{k^2}{a^2} \dots\dots\dots(2)$

وبتوحيد المقامات نجد: $x'^2 = \frac{k^2(a^2-x^2)}{x^2\,a^2} \Longrightarrow x' = \mp\frac{k}{ax}\sqrt{a^2 - x^2}$

نأخذ الإشارة السالبة لأن القوة جاذبة "تجذب القوة نحو المركز"

$$\Longrightarrow x' = -\frac{k}{ax}\sqrt{a^2 - x^2}$$

لنحصل على x نكامل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{ax}\sqrt{a^2 - x^2}$

و هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات:

وبفصل المتحولات نجد: $\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{k}{a}.dt$

نكامل الطرفين بعد أن نضرب ونقسم على (-2)

تذكرة : $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)}$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2\,x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int -\frac{k}{a}.dt$$

$$\boxed{-\sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{k}{a}t + c_2 \dots\dots\dots(*)}$$

لتعيين c_2 من شروط البدء$((\;t = 0 \;\;, x = a))$ نعوض في $(*)$ فنجد:

$$0 = 0 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 0 \Longrightarrow \sqrt{(a^2 - x^2\,)} = \frac{k}{a}\;\; t$$

نربع الطرفين: $x^2 = a^2 - \frac{k^2}{a^2}\ t^2 \Longrightarrow a^2 - x^2 = \frac{k^2}{a^2}\ t^2$

$$\boxed{x = \sqrt{a^2 - \frac{k^2}{a^2} t^2}}$$

و هو قانون الحركة

2) لإيجاد الزمن لحظة وصول النقطة إلى الموضع o

من العلاقة $\boxed{\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{k}{a}dt}$ نجد :

$$\int_a^0 \frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int_0^t \frac{k}{a}dt \Longrightarrow \left[-\sqrt{a^2-x^2}\right]_a^0 = \left[-\frac{k}{a}t\right]_0^t$$

$$a = \frac{k}{a}t \Longrightarrow \boxed{t = \frac{a^2}{k}}$$

السؤال الثالث : يدور إلكترون حول نواة ذرة بمسار دائري وبسرعة ثابتة v، أثرنا على هذا الإلكترون بقوة مماسة لمساره.

والمطلوب: تعيين السرعة الواجب تطبيقها على الإلكترون لكي يفلت من جذب النواة.

الحل

انطلاقاً من قانون المسار لقطع مخروطي $u = \frac{1}{r} = \frac{1+e.\cos(\theta)}{P} \Longleftarrow r = \frac{P}{1+e.\cos(\theta)}$

نطبق دستور بينييه الأول ((لأننا نريد حساب السرعة))

$$v^2 = c^2\left[{u'}^2 + u^2\right]$$

نوجد ((u')) من اشتقاق ((u)) فنجد.. $u' = -\frac{e\sin(\theta)}{P} \Longleftarrow u = \frac{1+e.\cos(\theta)}{P}$

بتعويض كل من ((u و u')) بدستور بينييه الأول..

$$v^2 = c^2\left[\frac{e^2\sin^2(\theta)}{P^2} + \frac{(1+e.\cos\theta)^2}{P^2}\right]$$

$$v^2 = c^2\left[\frac{e^2\sin^2(\theta)}{P^2} + \frac{1+e^2\cos^2(\theta)+2e\cos(\theta)}{P^2}\right] \Longrightarrow v^2 = c^2\left[\frac{e^2}{P^2} + \frac{2e\ \cos(\theta)+1}{P^2}\right]$$

انتبه $e^2\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta = e^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = e^2$

نخرج P عامل مشترك من المقام ونضيف ونطرح 1 :

$$v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{e^2-1}{P}+\frac{2+2e\ \cos(\theta)}{P}\right]\Longrightarrow v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{e^2-1+1+1+2e\ \cos(\theta)}{P}\right]$$

إذا كان المسار دائري فإن $e=0$ و $r=P$ ومنه

$$v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{e^2-1}{P}+\frac{2(1+e\ \cos\theta)}{P}\right]\Longrightarrow v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{e^2-1}{P}+\frac{2}{r}\right]\dots(1)$$

$$v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{-1}{r}+\frac{2}{r}\right]=\frac{c^2}{P}\left[\frac{1}{r}\right]\Longrightarrow v^2=\frac{c^2}{P^2}$$

ولكي يفلت الإلكترون، يجب أن يكون مساره على شكل قطعٍ مكافئ لكي يبتعد عن النواة

ويكون المسار قطع مكافئ عندما نعوض $e=1$ في المعادلة (1)

$$v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{2}{r}\right]\Longrightarrow \boxed{v^2=\frac{2c^2}{P^2}}$$

السؤال الرابع : في مستوي شاقولي OXY توجد نقطة ، معرفة بترتيبها $AOX=\alpha$ و M نقطة مادية كتلتها m. في لحظة واحدة قذفت النقطة M من o وفق OA وسرعة ابتدائية v_0 ثم تركت نقطة مادية أخرى M' كتلتها m' تسقط بدون سرعة ابتدائية من A . **برهن** أن المتحرِّكين يتلاقيان في نقطة واحدة مثل P **ثم برهن** أن المستقيم MM' يبقى موازيا لاستقامة مفروضة ثم احسب طول هذا المستقيم

الحل

1) برهن أن المتحركين يتلاقيان في نقطة واحدة مثل ρ ،

شرط التلاقي هو $y_m=y'_m \quad , \quad x_m=x'_m$

لنحسب كل من $y_m\ ,\ y'_m\ ,\ x_m\ ,\ x'_m$

إن حركة M هي حركة قذيفة .

حسب الدراسة النظرية M في لحظة البدء كانت في المبدأ ، وكانت سرعة النقطة المادية v_0 تصنع زاوية مقدارها α مع ox ، وضمن هذه الشروط يكون لدينا :

$$x=y=z=0\quad ,\quad x'=v_0.\cos\alpha\quad ,y'=0\ ,z'=v_0.\sin\alpha$$

نعين الثوابت (لنحصل على نوع الحركة) لدينا

$$c_1=v_0.\cos\alpha\quad ,c_2=c_4=c_5=c_6=0\quad ,c_3=v_0.\sin\alpha$$

نعوض في

$$x = c_1t + c_4 \quad , \quad y = c_2t + c_5 \quad , \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3t + c_6$$

وبذلك قانون الحركة للنقطة المادية المقذوفة بالزاوية $((\alpha))$

$$x = v_0t.\cos\alpha \qquad , \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t.\sin\alpha$$

لنوجد حركة M' : إن حركة M' هي حركة نقطة تسقط سقوط حر

أولاً : الحركة على y : حسب قانون التحريك الاساسي $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

$$-mg = my'' \Longrightarrow -g = y'' \Longrightarrow -gt + c_1 = y'$$

$$\Longrightarrow \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2 \ldots .(1)$$

نحسب كلاً من c_1, c_2 من شروط البدء $((t = 0))$ نجد $y' = 0 \Longrightarrow y = h$

ومنه $c_1 = 0, \ c_2 = h$ وبتعويض بالعلاقة (1) نجد: $y = h - \frac{1}{2}gt^2$

ثانياً : الحركة على x

$$mx'' = 0 \Longrightarrow x'' = 0 \Longrightarrow x' = c_3 \Longrightarrow x = c_3t + c_4$$

من شروط البدء $((t = 0))$ نجد :

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} \Longrightarrow x = \frac{h}{\tan\alpha} \Longrightarrow x = h.\cot\alpha \ldots .(2)$$

ومنه $c_4 h.\cot\alpha \quad , \quad c_3 = 0$ وبالتعويض بالعلاقة (2) نجد : $x = h.\cot\alpha$

ومنه نطبق قانون التلاقي :

$$x_{m'} = x_m \Longrightarrow h.\cot\alpha = v_0.t\cos\cot\alpha \Longrightarrow t = \frac{h}{v_0\sin\alpha}$$

$$y_{m'} = y_m \Longrightarrow v_0t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow t = \frac{h}{v_0\sin\alpha}$$

ومنه في اللحظة $t = \frac{h}{v_0\sin\alpha}$ تتساوى فاصلة وترتيب كل من المتحركين مما يدل على تلاقيهما

2) لنبرهن ان المستقيم MM' يبقى موازياً يكفي ان نثبت أن مياو طوال الزمن

$$\mu = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h - \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t\sin\alpha + \frac{1}{2}gt^2}{h\cot\alpha - v_0.t\cos\alpha} = \frac{g - v_0.t\sin\alpha}{h\cot\alpha - v_0.t\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha\left(\frac{\mathrm{h}}{\sin\alpha} - v_0 t\right)}{\cos\alpha\left(\frac{\mathrm{h}}{\sin\alpha} - v_0 t\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

2) لنأخذ المثلث الصغير من الرسم نلاحظ أن : وهو حساب طول المستقيم

$$\cos\alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \left|\frac{x_{m'} - x_m}{\cos\alpha}\right|$$

لم يتم حل هذا التمرين بالمقرر لكن تم تعليقه من قبل الدكتور في العام الماضي

" انتهى حل الدورة "

" دورة الفصل الثاني 2016 "

السؤال الأول : 1) لتكن M نقطة مادية في لحظة البدء كانت متوضعة في مبدأ جملة احداثية ديكارتية فيها oz شاقولي صاعد وسرعة النقطة المقذوفة v_0 واللحظة الواقعة في المستوي oxz وتصنع زاوية قدرها $\alpha \geq 0$ مع المحور ox . ادرس حركة النقطة المادية في وسط مقاوم حيث تخضع النقطة المادية لمقاومة متناسبة مع السرعة من الشكل $R = -mkv$ حيث k عامل ثابت يتعلق بطبيعة الوسط و m كتلة النقطة المادية

2) اشرح مبدأ دلامبير -لاغرانج

السؤال الثاني : AB قضيب طوله $2l$ مهمل الكتلة يتحرك في الفضاء بحيث تنزلق نهايته A بدون احتكاك على المستوي الافقي oxy اما نهايته B فتنزلق بدون احتكاك على المحور الشاقولي oz ، M نقطة مادية كتلتها m متوضعة في مركز ثقل القضيب .

والمطلوب : **اكتب معادلة الطاقة الحركية للنقطة M .**

السؤال الثالث : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد $F = -m\frac{k^2}{x^3}$.

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء:

$$t = 0 \quad , \quad x = a \quad , \quad x' = 0$$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة للموضع o (مركز الإحداثيات) ؟

السؤال الرابع : أوجد القوة المركزية لنقطة مادية مسارها القطع المخروطي $r = \frac{P}{1+e\cos(\theta)}$

انتهت الأسئلة ☺

" الحل ^_^ "

السؤال الأول : 1) لتكن M نقطة مادية في لحظة البدء كانت متوضعة في مبدأ جملة احداثية ديكارتية فيها oz شاقولي صاعد وسرعة النقطة المقذوفة v_0 واللحظة الواقعة في المستوي oxz وتصنع زاوية قدرها $\alpha \geq 0$ مع المحور ox . ادرس حركة النقطة المادية في وسط مقاوم حيث تخضع النقطة المادية لمقاومة متناسبة مع السرعة من الشكل $R = -mkv$ حيث k عامل ثابت يتعلق بطبيعة الوسط و m كتلة النقطة المادية

2) اشرح مبدأ دلامبير -لاغرانج

الحل

1) حسب قانون التّحريك الأساسي لدينا: $m\vec{\Gamma} = \sum \vec{F}$

$$mx'' = -mkx' \quad , \quad my'' = 0 \quad , \quad mz'' = -mg - mkz'$$

نقسّم على m : $x'' = -kx' \ldots\ldots\ldots (1) \quad , \quad z'' = -g - kz' \ldots\ldots\ldots (2)$

وهي المعادلات التفاضليّة للحركة، نحلّها:

<u>لنأخذ المعادلة (1):</u> $x'' = -kx' \Rightarrow \dfrac{dx'}{dt} = -kx'$

وهي معادلة تفاضليّة قابلة لفصل المتحوِّلات:

$$\frac{dx'}{x'} = -k\,dt \Rightarrow ln|x'| = -kt + c_1$$

نعين c_1 من شروط البدء...

$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = v_0 \cos\alpha , y' = 0, z' = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه: $c_1 = ln(v_0 \cos\alpha)$

نعوِّض بالمعادلة فنجد: $ln|\,x'| = -kt + ln(v_0 \cos\alpha)$

$$ln\left|\frac{x'}{v_0 \cos\alpha}\right| = -kt \Rightarrow \frac{x'}{v_0 \cos\alpha} = e^{-kt}$$

$$x' = v_0\, e^{-kt} \cos\alpha \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0\, e^{-kt} \cos\alpha$$

$$\Rightarrow dx = (v_0\, e^{-kt} \cos\alpha).dt$$

بالمكاملة نجد: $x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cos\alpha + c_2$

نعين c_2 من شروط البدء نحتاج الشروط: $x = 0\ ,\ t = 0$ ونعوض ...

$$0 = -\frac{v_0}{k} e^{0} \cos\alpha + c_2 \Longrightarrow 0 = -\frac{v_0}{k} \cos\alpha + c_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{v_0}{k} \cos\alpha$$

بالتعويض نجد:

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cos\alpha + \frac{v_0}{k} \cos\alpha \Longrightarrow \boxed{x = \frac{v_0}{k} \cos\alpha\, (1 - e^{-kt})}$$

وهي المعادلة التي تمثل حركة نقطة مادية على المحور ox

لنأخذ المعادلة (2):

$$z'' = -g - kz' \Longrightarrow \frac{dz'}{dt} = -(g + kz')$$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات: $\frac{dz'}{g+kz'} = -dt$

بضرب الطرفين بـ k ثم المكاملة:

$$ln|g + kz'| = -kt + c_3$$

نعين c_3 من شروط البدء:

$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = v_0 \cos\alpha\, , y' = 0, z' = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

بذلك نجد أن: $c_3 = ln|g + kv_0 \sin\alpha|$

ومنه بالتعويض: $ln|g + kz'| = -kt + ln|g + kv_0 \sin\alpha|$

وبالتالي:

$$ln\left|\frac{g+kz'}{g+kv_0 \sin\alpha}\right| = -kt \Longrightarrow \frac{g+kz'}{g+kv_0 \sin\alpha} = e^{-kt}$$

$$kz' = (g + kv_0 \sin\alpha)\, e^{-kt} - g \Longrightarrow g + kz' = (g + kv_0 \sin\alpha)\, e^{-kt}$$

نقسم الطرفين على k فنحصل على:

$$z' = \frac{(g + kv_0 \sin\alpha)}{k}\, e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات:

$$dz=\left(\frac{g+kv_0\sin\alpha}{k}\,e^{-kt}\right)dt-\frac{g}{k}\,dt \Longleftarrow \frac{dz}{dt}=\frac{g+kv_0\sin\alpha}{k}\,e^{-kt}-\frac{g}{k}$$

بالمكاملة نجد:

$$z=-\frac{g+kv_0\sin\alpha}{k^2}\,e^{-kt}-\frac{g}{k}t+c_4$$

نعين c_4 من شروط البدء:

$$t=0\begin{cases} x=y=z=0\\ x'=v_0\cos\alpha\,,y'=0,z'=v_0\sin\alpha\end{cases}$$

فنجد أن : $c_4=\frac{g+kv_0\sin\alpha}{k^2}$

وبالتالي:

$$z=-\frac{g+kv_0\sin\alpha}{k^2}\,e^{-kt}-\frac{g}{k}t+\frac{g+kv_0\sin\alpha}{k^2}$$

$$\boxed{z=\frac{1}{k^2}(g+kv_0\sin\alpha)(1-e^{-kt})-\frac{g}{k}t}$$

وهي المعادلة الثانيَّة تمثل حركة النقطة المادية على المحور oz.

2) لتكن M نقطة مادية كتلتها m تؤثر فيها قوة فعالة $\vec{F}$ وقوى الربط محصلتها $\vec{R}$ ولنكتب مبدأ دالا امبير لهذه النقطة $\vec{F}-m\vec{\Gamma}+\vec{R}=0$ نضرب عددياً طرفي هذه العلاقة بـــ δ_r فنجد..

$\left(\vec{F}-m\vec{\Gamma}+\vec{R}\right)\delta_r=0$ وإذا فرضنا أن الارتباط مثالي يكون لدينا $\vec{R}.\delta_r=0$

وبالتالي تصبح العلاقة $\left(\vec{F}-m\vec{\Gamma}\right)\delta_r=0$ وهي معادلة دالا امبير لاغرانج.

ويمكن أن تكتب على الشكل التالي بعد الإسقاط ....

$$(F_x-mx'')\delta_x+(F_y-my'')\delta_y+(F_z-mz'')\delta_z=0$$

هنا لدينا النقطة المادية مقيدة $(\delta_x,\delta_y,\delta_z)$ ليست مستقلة الارتباطات أي أن هذه الارتباطات ترتبط مع بعضها البعض بعلاقة من الشكل :

$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta_x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta_y+\frac{\partial f}{\partial z}\,\delta_z=0$ لأن أمثالها ليس أصفاراً

في حالة خاصة إذا كانت أمثالها تساوي الصفر يكون الارتباطات مستقلة خطياً

((تكون النقطة المادية طليقة))

$$mx''=F_x\quad,\quad my''=F_y\;,mz''=F_z$$

ومنه نحصل على $m\Gamma = F$ وهو قانون نيوتن الثاني .

من معادلة دالا امبير لاغرانج $(\vec{F} - m\vec{\Gamma}).\vec{\delta_r} = \vec{0}$

بعض المؤلفين يعتبرون هذه المعادلة أنها مبدأ اساسي في الميكانيك ((مثل نيوتن و دالا امبير)) ويطلق على هذا المبدأ ((المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية)) تمييزاً له عن المبدأ التوازني الذي يتعلق بتوازن النقطة المادية والذي ينص على أن الشرط اللازم والكافي لتوازن نقطة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هو أن يكون العمل الافتراضي الجزئي للقوة الفعالة المؤثرة عليها يساوي إلى الصفر $(\vec{F}.\vec{\delta_r} = \vec{0})$ وهذا ما يطلق عليه مبدأ دالا امبير .

السؤال الثاني والثالث :

>> تم حل الثاني في الدورة الإضافية 2015 اما الثالث تم حله في الدورة الفصل الاول 2016 <<

السؤال الرابع : أوجد القوة المركزية لنقطة مادية مسارها القطع المخروطي $r = \frac{P}{1+e\cos(\theta)}$

الحل

لإيجاد القوة المؤثرة نستخدم دستور بينيه الثاني : $F = -mc^2u^2(u'' + u)$

حيث : $u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta)}{P}$

$$u' = -\frac{e\sin(\theta)}{P} \Longrightarrow u'' = -\frac{e\cos(\theta)}{P}$$

نعوض كل من $((u', u''))$ في قانون التحريك الأساسي

$$F = -mc^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\left(-\frac{e\cos(\theta)}{P} + \frac{1+e\cos(\theta)}{P}\right)$$

$$F = -mc^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\left(\frac{1}{P}\right)$$

وبما أن $u = \frac{1+e.\cos(\theta)}{P} \Longrightarrow u^2 = \frac{(1+e.\cos\theta)^2}{P^2}$

$$F = -m.c^2.u^2\left(\frac{1}{P}\right)$$

ونعلم أيضاً أنَ : $u = \frac{1}{r} \Leftarrow u^2 = \frac{1}{r^2}$

وبالتالي : $\boxed{F = -m.\frac{c^2}{\rho r^2}}$ وهي القوَة المركزية التي تؤثر على النقطة المادية.

" انتهى حل الدورة "

" الدورة الإضافية 2016 "

السؤال الأول : برهن أن عبارة الطاقة الحركية في الحركة النسبية تعطى بالشكل :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \overrightarrow{F}.dr + \overrightarrow{J_e}.dr$$

السؤال الثاني : ادرس حركة نقطة مادية على منحن ثابت بوجود احتكاك .

السؤال الثالث : تتحرك نقطة مادية على مسار دائري تحت تأثير قوة مركزية تتجه دوماً نحو محيط الدائرة فإن هذه القوة جاذبة تتناسب عكساً مع القوة الخاصة للبعد. $r = 2\,\mathrm{a}\cos\theta$.

السؤال الرابع : يتحرك زورق كتلته M وفق المعادلة $x = v_0\,\frac{m}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right)$

حيث : v_0 السرعة الابتدائية للزورق و a مقدار ثابت.

المطلوب: أوجد مقاومة الماء التي يتلقاها الزورق من الماء

انتهت الأسئلة ☺

السؤال الأول : برهن أن عبارة الطاقة الحركية في الحركة النسبية تعطى بالشكل :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}.dr + \vec{J_e}.dr$$

<<تم حل السؤال الاول والثاني في دورة الفصل الثاني 2015>>

السؤال الثالث : تتحرك نقطة مادية على مسار دائري تحت تأثير قوة مركزية تتجه دوماً نحو محيط الدائرة فإن هذه القوة جاذبة تتناسب عكساً مع القوة الخاصة للبعد. $r = 2\ \cos\theta$.

الحل

حسب قانون التحرِيك الأساسي: $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

وحسب دستور بينيه الثاني: $F = -mc^2u^2(u'' + u)$

نعلم أن $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2\,cos(\theta)}$

نشتق بالنسبة لـ θ :

$$u' = \frac{2\,sin(\theta)}{(2)^2\,cos^2(\theta)} \Rightarrow u' = \frac{sin(\theta)}{2\,cos^2(\theta)} \Rightarrow u'' = \frac{2\,cos^3(\theta) + 4\,sin^2(\theta)\,cos(\theta)}{(2)^2\,cos^4(\theta)}$$

بِسحب $2\,cos(\theta)$ عامل مُشترك :

$$u'' = \frac{2\,cos(\theta)[cos^2(\theta) + 2\,sin^2(\theta)]}{(2)^2\,cos^4(\theta)}$$

نجد ...

$$\boxed{u'' = \frac{cos^2(\theta) + 2\,sin^2(\theta)}{2\,cos^3(\theta)}}$$

نعوِض في القانون:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{cos^2(\theta) + 2\,sin^2(\theta)}{2\,cos^3(\theta)} + \frac{1}{2\ cos(\theta)}\right]$$

لتوحيد المقامات نضرب البسط والمقام $\left(\frac{1}{2\,cos(\theta)}\right)$ بـ $cos^2(\theta)$

فنجد:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{cos^2(\theta) + 2\,sin^2(\theta)}{2\,cos^3(\theta)} + \frac{cos^2(\theta)}{2\ cos^3(\theta)}\right]$$

انتبه $\quad cos^2(\theta)+2\,sin^2(\theta)+cos^2(\theta)=2(sin^2(\theta)+cos^2(\theta))=2$

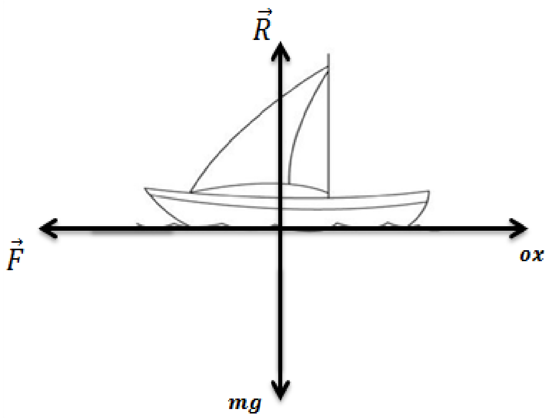
$$\Rightarrow\ F=-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{2}{2\,cos^3(\theta)}\right]\ \Rightarrow\ F=-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{cos^3(\theta)}\right]$$

ولدينا من السؤال معادلة المسار $\quad r=2\,cos(\theta)\ \Rightarrow\ cos(\theta)=\frac{r}{2}$

$$F=-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^3}\right]\ \Rightarrow\ F=-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{(2)^3}{r^3}\right]$$

$$F=-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{8}{r^3}\right]=-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{8}{r^3}\right]\Rightarrow\ \boxed{F=-\frac{8mc^2}{r^5}}$$

و هي قوة جاذبة لأنها سالبة تتناسب عكساً مع القوّة الخامسة للبعد.



السؤال الرابع : يتحرك زورق كتلته M

وفق المعادلة $\quad x=v_0\,\frac{m}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{m}t}\right)$

حيث : v_0 السرعة الابتدائية للزورق و a مقدار ثابت.

المطلوب: أوجد مقاومة الماء التي يتلقاها الزورق من الماء

الحل

حركة الزورق مستقيمة على المحور ox. والقوى التي تطبق عليه هي:

mg وزن القارب $\vec{R}$ ورد الفعل و $\vec{F}$ القوى المؤثرة عكس مسار الزورق (مقاومة)

حسب قانون التحريك الاساسي: $\quad m\,\vec{\Gamma}=\vec{F}$

بالإسقاط على المحور ox نجد: $\quad F_x=m\,x'' \ \Rightarrow\ m\,\Gamma_x=F_x$

وبالتالي حسب العلاقة السابقة : $\quad x=v_0\,\frac{m}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{m}t}\right)$

نشتق ..... $\quad x''=-\frac{a}{m}x' \ \Leftarrow\ x''=-v_0\,\frac{a}{m}e^{-\frac{a}{m}t} \ \Leftarrow\ x'=v_0e^{-\frac{a}{m}t}$

$$F_x=m.x''\ \Rightarrow\ F_x=-ax'\ \Rightarrow\ \boxed{F=-ax'}$$

هذه القوى الذي يتلقاها القارب على سطح الماء (مقاومة)

" انتهى حل الدورة "

" دورة الفصل الأول 2017 "

السؤال الأول : 1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية .

2) ادرس حركة النقطة المادية كتلتها m على منحن بوجود احتكاك

السؤال الثاني : في لحظة وقف محرك زورق كانت سرعته v_0 يتعرض هذا الزورق لمقاومة من الماء تساوي $R = -\alpha x' - \beta x'^2$ حيث α, β ثوابت موجبة .

1) برهن أن الزورق لن يتوقف أبداً .

2) ماهي الفترة الزمنية اللازمة حتى تصبح سرعة الزورق مساوية $\frac{v_0}{3}$

السؤال الثالث : علق في الطرف السفلي B لنابض شاقولي جسم وزنه P أما الطرف الاخر A للنابض فمثبت في موضع A يزداد طول النابض بمقدار δ نتيجة لتعليق الجسم عند توازنه وتهمل مقاومة الوسط .

أوجد قانون الحركة الاهتزازية لهذا الجسم اذا ترك يسقط دون سرعة ابتدائية .

إن هذه الدورة هي نفسها دورة 2015 الفصل الثاني ^_^

انتهت الأسئلة ☺

إعداد : محمد علي فليون && رهف سليمان