أسئلة امتحان مقرر نظرية القياس

دورة الفصل الأول . العام الدراسي 2014-2015

السؤال الأول :

أ] عرّف الصف المطرد و أثبت أن صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ ليس صفاً مطرداً".

الصف المطرد Monotone Class

ليكن $(X, \mathcal{M})$ فضاء ميوسي، نقول عن $\mathcal{C} \subset P(X)$ انه صف مطرد إذا حقق :

1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$

من أجل كل متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{C}$ فإن اتحادها ينتمي لـ $\mathcal{C}$ "وكذا تقاطعها".

2) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$

من أجل كل متتالية متناقصة من عناصر $\mathcal{C}$ فإن تقاطعها ينتمي لـ $\mathcal{C}$ "وكذا اتحادها"

يمكن للطالب في الامتحان أن يضيف بعض الأمثلة عن الصفوف المطردة.

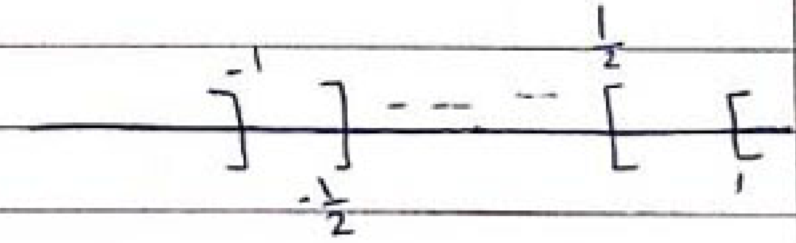
* إن صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ ليس صفاً مطرداً".

Let $A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\; ; n \geq 1$

$A_1 =]-1, 1[$

$A_2 =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$\vdots$



نلاحظ أن A_n متتالية متناقصة من {المجالات المفتوحة}

ولكن $\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\} = [0,0]$

و $[0,0]$ لا ينتمي لصف المجالات المفتوحة

وبالتالي : صف المجالات المفتوحة ليس صفاً مطرداً".

ب] عرّف التقارب بالنسبة الى قياس معطى وأثبت أنَّ مجموع وفرق متتاليتين متقاربتين بالقياس هما متتاليتين متقاربتين بالقياس.

يعرّف التقارب بالنسبة الى قياس معطى:

ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس، نقول (f_n) متتالية من الدوال القيوسة الموجبة إنها متقاربة من دالة f وفق القياس μ ونكتب كمرمّزاته $f_n \xrightarrow{\mu} f$ إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon>0: \mu(A_n(\varepsilon)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

حيث

$$A_n(\varepsilon)=\{x, |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\}$$

تساؤل: هل يوجد تعريف آخر للتقارب بالنسبة لقياس معطى؟
"القياس منتهٍ".

للإجابة عن هذا السؤال انظر التمرين (٨) صفحة (١٦٦).

ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس و $\mu(X)<\infty$ ولنضع،

$$\rho(f,g)=\int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu$$

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f \Leftrightarrow \rho(f_n,f)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

* أثبت أن مجموع وفرق متتاليتين متقاربتين بالقياس هما متتاليتين متقاربتين بالقياس.

الحل موجود كإثبات لمبرهنة ٧-٢-٢ صفحة ١٤١

ولكن تنبه الى أنه عليك تعويض قيم α, β منذ البداية
تأخذ $\beta=1$ و $\alpha=1$ أو $\beta=-1$ و $\alpha=1$ حسب ما تريد إثباته
كذلك تنبه أنه يوجد خطأ في الكتاب الصفحة ١٤١ العلاقة الأخيرة والصواب هو،

$$\mu(\{x: |\alpha f_n(x)+\beta g_n(x)-(\alpha f(x)+\beta g(x))|\geq\varepsilon\}) \leq$$

$$\leq \mu\left(\{x, |f_n(x)-f(x)|\geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\}\cup\{x: |g_n(x)-g(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2|\beta|}\}\right)$$

$$\leq \mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\}\right) + \mu\left(\{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\}\right)$$

وبالمرور بالنهايات نجد المراد.

السؤال الثاني :
عرف الدالة المتوسة وأثبت أن كل دالة متوسة موجبة هي نهاية لمتتالية متزايدة من الدوال الدرجية

تعريف الدالة المتوسة :
ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ فضائين مقيسين حيث :
$\mathcal{M}$ جبر تام على X و $\mathcal{C}$ جبر تام على Y
ولتكن $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{C})$
f متوسة $\Leftrightarrow$ (الصورة العكسية لأي مجموعة متوسة هي مجموعة متوسة)

f متوسة $\Leftrightarrow$ $\forall E \in \mathcal{C} \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$

ملاحظة :
من أجل $Y = \mathbb{R}$ هو المستقر العملي و $\mathcal{C}$ الجبر المعرف على جبر بوريل $B_{\mathbb{R}}$ عندها
$$f : (X, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$$
f متوسة إذا حقق أحد الشروط التالية ،
" التعريف السابق يكافئ أحد ما يلي :

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : f^{-1}(]\alpha, \infty[) \in \mathcal{M}$
2) $\forall \beta \in \mathbb{R} : f^{-1}(]-\infty, \beta]) \in \mathcal{M}$
3) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : f^{-1}([\alpha, +\infty[) \in \mathcal{M}$
4) $\forall \beta, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leq \beta ; f^{-1}(]\alpha, \beta]) \in \mathcal{M}$

ولإثبات أن كل دالة متوسة موجبة هي نهاية لمتتالية متزايدة من الدوال الدرجية من أجل f دالة متوسة موجبة مستقرها $\mathbb{R}$ ومعرفة عليه الجبر التام $B_{\mathbb{R}}$ جبر بوريل ،

بالشكل التالي:

$$f_n(x) = \frac{[2^n f(x)]}{2^n} \quad ; \text{if} \quad f(x) < n$$

$$f_n(x) = n \quad ; \text{if} \quad f(x) \geq n$$

ويمكن برهان أن f_n متتالية متزايدة ومتقاربة من f "هذه كانت فكرة البرهان"

"الإثبات في الكتاب صفحة ٧٦ لمن يود الاطلاع عليه".

السؤال الثالث:

اذكر نص مبرهنة فوبيني واذكر مثالاً عليها ثم مثالاً معاكساً.

* لنأخذ مثالاً عن مبرهنة فوبيني:

لنأخذ $f(x,y) = x.y \; : \; x \in [0,1]$ و $y \in [0,1]$

نلاحظ أن:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y).dxdy = \int_0^1\int_0^1 x.y.dx.dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_0^1 .dy = \int_0^1 \frac{y}{2}.dy = \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

كما نلاحظ أن:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y).dy.dx = \int_0^1\int_0^1 x.y.dy.dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x\right]_0^1 .dx = \int_0^1 \frac{x}{2}.dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

نلاحظ أن:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 f(x,y).dy.dx$$

لنأخذ: $f(x,y) = 1$ كما يلي

$$\int_0^1\int_0^1 1\,dxdy = \int_0^1 [x]_0^1 .dy = \int_0^1 dy = y]_0^1 = 1$$

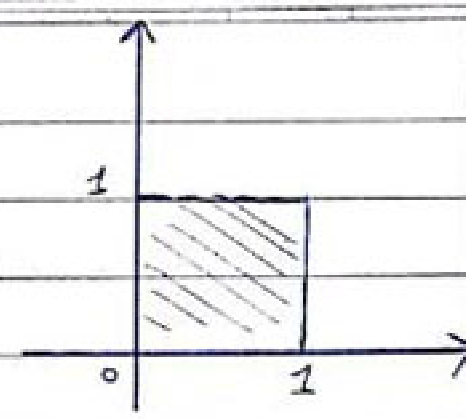
$$\int_0^1\int_0^1 1\,dy\,dx = \int_0^1 [y]_0^1 dx = \int_0^1 1\,dx = x]_0^1 = 1$$

وحسب المعنى الهندسي للتكامل نجد

$$\iint_\Delta dx\,dy = 1$$

الموضوع   التاريخ / /

وهنا مثال يوافق مبرهنة توبيني



لنذكر مثالاً معاكساً "يبيّن عدم صحة مبرهنة فوبيني في حال لم يكن التابع قيوس موجب"

لنأخذ :
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ونجد أنّ :
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$$
$$\neq$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$$

وبالتالي f غير كمول.

* نص مبرهنة توبيني : "صفحة 1.9".

ليكن لدينا:
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قيوس منته و $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ فضاء قيوس منته
و $\lambda = \mu \otimes \nu$

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) \times \mu(B) \quad , \forall A \in \mathcal{A} \, , \forall B \in \mathcal{C}$$

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

f قيوس موجب.

إنّ التكاملات الآتية متساوية

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$
$$= \int_{X \times Y} f(x,y)\, d\lambda(x,y)$$

الموضوع التاريخ / /

* نص مبرهنة كاراثيودوري "صفحة ٣٠"
ليكن μ^* قياساً خارجياً على مجموعة أجزاء X ، إن صف المجموعات المقيوسة بالنسبة لـ μ^* ونرمز له بـ $\mathcal{M}^*$ أي:

$$A \in \mathcal{M}^* \longleftrightarrow \forall K \subseteq X \ , \ \mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$$

ان $\mathcal{M}^*$ جبر تام وإن $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ قياس كامل.

فكرة البرهان:
الخطوة الأولى: اثبات أن $\mathcal{M}^*$ جبر
لنثبت أن μ^* جمعي على هذا الصف.
لنحصل:

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \ , \ A \cap B = \emptyset$$
$$A, B \in \mathcal{M}^*$$

حسب الفرض:

$$\mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$$
$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c)$$
$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

وذلك بملاحظة أن:

$$(A \cup B) \cap A = A \quad , \quad (A \cup B) \cap A^c = B$$

المرحلة الثالثة:
نريد إثبات مايلي:
إذا كانت $B_1, B_2, \ldots, B_n$ متتالية منفصلة
وكانت $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ فإننا سنثبت مايلي

$$\mu^*(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) \longrightarrow B \in \mathcal{M}^*$$

ثم نثبت...
المرحلة الرابعة:

$$\mu^*(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \mu^*(B_1) + \ldots$$

حسب الفرض الثاني وبالاستقراء نجد أنه يمكننا إثبات:

$$\forall K: \mu^*(K\cap(B_1\cup B_2)) = \mu^*(K\cap B_1) + \mu^*(K\cap B_2)$$

وبالاستقراء نجد أن:

$$\forall K: \mu^*(K\cap(B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n)) = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(K\cap B_i)$$

$$\mu^*(K\cap B) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(K\cap B_i)$$

$$\mu^*(K\cap(B_1\cup B_2)) = \mu^*(K\cap B_1) + \mu^*(K\cap B_2)$$

$$\mu^*(K_1) = \mu^*(K_1\cap B_1) + \mu^*(K_1\cap B_1^c)$$

لنثبت: $\mu^*(K\cap B) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(K\cap B_i)$

$$\mu^*(K) = \mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{N}B_n\right)\right) + \mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{N}B_n\right)^c\right)$$

$$\mu^*(K) \geq \sum_{n=1}^{N}\mu^*(K\cap B_n) + \mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)^c\right)$$

$$\mu^*(K) \geq \sum_{n=1}^{N}\mu^*(K\cap B_n) + \mu^*(K\cap B^c)$$

$$\mu^*(K) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(K\cap B_n) + \mu^*(K\cap B^c)$$

$$\mu^*(K\cap B) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(K\cap B_i)$$

$$\mu^*(K) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}K\cap B_n\right) + \mu^*(K\cap B^c)$$

$$\mu^*(K) \geq \mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right) + \mu^*(K\cap B^c)$$

$$\mu^*(K) \geq \mu^*(K\cap B) + \mu^*(K\cap B^c) \geq \mu^*(K)$$

$$\Rightarrow \mu^*(K) = \mu^*(K\cap B) + \mu^*(K\cap B^c)$$

واجب تحضير برهان كاراتيودوري كاملاً

لا تنسَ أنّ المرجع الأساسي لهذا المقرر هو المحاضرات

انتهت المحاضرة.

64

الموضوع تشرين د الأمحرة التاريخ 2017/5/17

أسئلة دورة 2012 الدورة الثالثة (الإضافية):

السؤال الأول: 1

عرّف ما يلي:

الجبر التام، الصف المطرد، التابع القيوس الموجب، تكامل تابع معقد، إشارة كيفية، تكامل تابع قيوس، تكامل تابع معقد، النهاية العليا لمتتالية من الأعداد، النهاية العليا لمتتالية من المجموعات، التغير الكلي لمقياس عقدي، التقارب بالمقياس.

* النهاية العليا لمتتالية من الأعداد:

إذا كانت $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية عليس بالضرورة أن تكون متقاربة أو متباعدة، وعندها:

$$B_1 = \sup\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

$$B_2 = \sup\{a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$B_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

أي B_n متتالية متناقصة، وبالتالي نهايتها موجودة.

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$$

B موجودة ووحيدة "وتسمى نهاية الحد العليا"

نسمي B النهاية العليا للمتتالية $(a_n)_n$

ونكتب:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n = B$$

وهو عدد حقيقي محدود أو غير محدود من $\overline{\mathbb{R}}$ "

* النهاية الدنيا لمتتالية من المجموعات:

ملاحظة هامة:

في الأصلالات تقول النهاية الدنيا لمتتالية من الأحداث، وهو الحدث الذي يتحقق إذا تحققت جميع الأحداث ما خلا عدداً منها

الموضوع   التاريخ / /

* إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية من المجموعات.
وإذا شكلنا المتتالية

$$B_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$
$$B_2 = \bigcap_{n=2}^{\infty} A_n$$
$$\vdots$$
$$B_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

إن B_n متتالية وبالتالي تزايدية تقارب حدها الأعلى أي:
$B = \sup B_n$ ونرمز لها ب:

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

نسمي المجموعة B النهاية الدنيا لمتتالية من المجموعات ونكتب

$$B = \underline{\lim}\, A_n$$

* التغير الكلي لقياس عقدي:
ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس "حيث μ قياس عقدي"
نعرف:

$$|\mu|(E) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \right\}$$

ويبرهن على أن $\lambda = |\mu|$ قياس موجب منته "$|\mu|(X) < \infty$"
ونسمي $|\mu|$ المتغير الكلي للقياس μ.

صفحة ١١٧ من الكتاب

2 السؤال الثاني:
اذكر نص توطئة فاتو، ثم نص مبرهنة التقارب المرجوح وأثبتها "كما ورد في المحاضرات وليس كما ورد في الكتاب"

3 أثبت أن مجموع تابعين قيوسين تابع قيوسي ولاحظ تعريف التابع القيوسي بأكثر من طريقة.

الموضوع

4 اذكر نص مبرهنة كاراثيودوري وأثبت الخطوة الأولى منها والأخيرة.

نص مبرهنة كاراثيودوري:

اذا كان μ^* قياساً خارجياً على X فإن الصف الآتي جبر تام من أجزاء X.

$$A \in \mathcal{M}^* \Leftrightarrow \forall K \subset X : \mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$$

يسمى بشرط كاراثيودوري.

يسمى $\mathcal{M}^*$ الجبر التام المولد ب μ^*، ويسمى كل عنصر من $\mathcal{M}^*$ مجموعة مقيسة بالنسبة لـ μ^*.

ويكون ν مقصور μ^* على $\mathcal{M}^*$ قياساً عليها ويسمى القياس المولد ب μ^*

البرهان:

المرحلة الأولى: لنثبت أن $\mathcal{M}^*$ جبر على X وذلك بإثبات أنها تحقق ما يلي:

$$\emptyset, X \in \mathcal{M}^*$$

$$A \in \mathcal{M}^* \longrightarrow A^c \in \mathcal{M}^*$$

واذا أخذنا $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^*$ فإن:

$$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}^*$$

وينتج عن ذلك أن:

$$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}^*$$
$$A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{M}^*$$
$$A_1 \Delta A_2 \in \mathcal{M}^*$$

وهذا ما تم إثباته في المرحلة الأولى في الكتاب.

لننتقل للمرحلة الثانية.

المرحلة الثانية: اذا كانت $B_1, B_2, \dots, B_n$ متتالية من المجموعات المنفصلة من عناصر $\mathcal{M}^*$ فإن

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{M}^*$$

التاريخ / / الموضوع

أريد إثبات ما يلي:

$$\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(K\cap B_i)$$

يكفي إثباتها من أجل $n=2$ بالاستقراء:

$$\mu^*(\underbrace{K\cap(B_1\cup B_2)}_{K_1})=\mu^*(K\cap B_1)+\mu^*(K\cap B_2)$$

ولأن $B_1\in\mathcal{M}^*$ حسب شرط كاراتيودوري

$$\mu^*(K_1)=\mu^*(K_1\cap B_1)+\mu^*(K_1\cap B_1^c)$$

ولكن بملاحظة أن:

$$K_1\cap B_1=K\cap B_1\ ,\ K_1\cap B_1^c=K\cap B_2$$

نجد أن:

$$\mu^*(K_1)=\mu^*(K\cap B_1)+\mu^*(K\cap B_2)$$

أي:

$$\mu^*(K\cap(B_1\cup B_2))=\mu^*(K\cap B_1)+\mu^*(K\cap B_2)$$

بالتعميم "من خلال الاستقراء الرياضي" نجد أن:

$$\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(K\cap B_i)$$

المرحلة الثالثة: نستفيد مما سبق لإثبات أن $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\in\mathcal{M}^*$

أي لنبرهن أن:

$$\forall K\subseteq X\quad \mu^*(K)\overset{?}{=}\mu^*(K\cap B)+\mu^*(K\cap B^c)$$

مما سبق:

$$\mu^*(K)=\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\right)+\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)^c\right)$$

$$\mu^*(K)\geq\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\right)+\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c\right)$$

$$\mu^*(K)\geq\sum_{i=1}^{n}\mu^*(K\cap B_i)+\mu^*(K\cap B^c)$$

بالمرور بالنهايات نجعل $n\to\infty$ نحصل على:

$$\mu^*(K)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(K\cap B_i)+\mu^*(K\cap B^c)$$

$$\mu^*(K) \geq \mu^*(K \cap \underbrace{(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)}_{B}) + \mu^*(K \cap B^c)$$

$$\mu^*(K) \geq \mu^*(K \cap B) + \mu^*(K \cap B^c)$$

$$\geq \mu^*((K \cap B) \cup (K \cap B^c)) = \mu^*(K)$$

وبالتالي

$$\mu^*(K) = \mu^*(K \cap B) + \mu^*(K \cap B^c)$$

ومنه $B \in \mathcal{M}^*$

المرحلة الرابعة : لنثبت أن μ^* قياس على $\mathcal{M}^*$.

لتكن $(B_n)_{n\geq 1}$ متتالية من عناصر $\mathcal{M}^*$ ولنثبت أن :

$$\forall K \subseteq X : \mu^*(K \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(K \cap B_i)$$

الإثبات :

إن :

$$\mu^*(K \cap B) = \mu^*(K \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)) \geq \mu^*(K \cap (\bigcup_{n=1}^{m} B_n))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mu^*(K \cap B_n) : \forall m$$

إذن :

$$\mu^*(K \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(K \cap B_n) \geq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} K \cap B_n)$$

$$= \mu^*(K \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)) = \mu^*(K \cap B)$$

إذن هذه المتراجحات متساويات ومنه :

$$\mu^*(K \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(K \cap B_n)$$

ولو وضعنا $K = X$ لوجدنا :

التاريخ / / الموضوع

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$$

وواضح أنّ: $\mu^*(\emptyset)=0$

إذن μ_A قياس موجب على $\mathcal{M}^*$

وبذلك يتم المطلوب.

انتهت المحاضرة :)

انتهى المقرر

كل عام وأنتم بخير ...

رنا القاوقجي :)