20-4-2017

نظري

◄ دكتور المادة: ملك مارديني

◄ المحاضرة : الثانية عشر

◄ عنوان المحاضرة :المغلف

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـطريقة إيجاد الحل الشاذ (المغلف)

٢ـالمعادلات التفاضلية الجزئية التي تعالج كمعادلات تفاضلية عادية

٣ـمسألة القيمة الابتدائية ومسألة القيم الحدية و مبرهنة

٤ ـ المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى الغير المتجانسة

٥ ـ معادلة لاغرانج المتجانسة

لقد تعرفنا بالمحاضرة السابقة على المغلف وقلنا بأنه المنحني الذي يمس في كل نقطة من نقاطه أحد السطوح التكاملية وقلنا أن السطح التكاملي هو عبارة عن حل للمعادلة التفاضلية الجزئية وأيضاً قلنا بأن المغلف هو الحل الشاذ للمعادلة التفاضلية إن وجد ....

والآن سنتعرف على طريقة إيجاد المغلف ^_^ نتبع الخطوات التالية:

١) نشتق الحل التام بالنسبة للثوابت.

٢) نقوم بحذف الثوابت من العلاقات الناتجة ومن الحل التام.

٣) نسمي السطوح الناتجة التي تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية بالحل الشاذ لهذه المعادلة.

مثال على ذلك:

أوجد المغلفات(الحلول الشاذة) ان وجدت للمعادلة التفاضلية التالية:

$$z = px + qy - p^2 - q^2 \dots\dots\dots (I)$$

حيث الحل التام لهذه المعادلة هو : $z = ax + by - a^2 - b^2$

الحل: نلاحظ وجود الثابتين a, b في الحل العام والآن لنطبق الخطوات السابقة:

١) نشتق الحل التام بالنسبة ل a, b :أولاً بالنسبة ل a :

$$0 = x - 2a \rightarrow a = \frac{x}{2}$$

نشتق بالنسبة ل b ومنه : $0 = y - 2b \rightarrow b = \frac{y}{2}$

٢) نعوض قيمة a, b في الحل التام ومنه (بعد الاختزال):

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\#)$$

الآن إذاً هذا المغلف حقق المعادلة التفاضلية نقول عنه بأنه الحل الشاذ لها

لنعوض z في المعادلة (I) حيث أن $p = \frac{x}{2}$ && $q = \frac{y}{2}$ والآن نعوض في (I) كلاً من

$$(\#)\&\, p\, \&q \rightarrow z = px + qy - p^2 - q^2 \xRightarrow{\text{و بالتعويض والاختصار}} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

حصلنا على مطابقة وبالتالي $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$ هو حل شاذ للمعادلة (I)

المعادلات التفاضلية الجزئية التي تعالج كمعادلات تفاضلية عادية:

١) إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية تحوي المشتقات الجزئية بالنسبة لأحد المتغيرين <u>فقط</u> عندها نعتبر المتغيرات هي وسيطاً ثابتاً حيث أن ثوابت التكامل هي دوال كيفية في هذا الوسيط (أي عندما يكون لدينا تفاضل تابع بالنسبة لمتغير واحد وهذا التابع يكون بدلالة متغيرين فإن المتغير الثاني نعامله كمعاملة الثابت وعند إجراء المكاملة لإيجاد الحل العام نضع الثابت وهو ضمنياً عبارة عن دالة بدلالة المتغير الثابت).

٢) يمكن حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية بإجراء تكامل بالنسبة لمتغير واحد في البداية ومن ثم نكامل بالنسبة للمتغير الثاني على أن نأخذ في كل حالة ثابت التكامل هو دالة كيفية في المتغير الآخر.

أمثلة: إذا كانت:

$$(1)\ p = 0 \to \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ \ \to z = \varphi(x)$$

إن هذه المساواة لاتتحقق إلا إذا كان z تابع ل y فقط لأن المشتق بالنسبة ل x معدوم وبالتالي هو لا يحوي x أي $z = \varphi(y)$.

$$(2)\ q = 0 \to \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \to z = \varphi(x)$$

كون المشتق بالنسبة ل y معدوم فهو لا يحوي y وبالتالي z تابع ل x فقط.

$$(3)\ r = 0 \to \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \to z = \varphi(y)x + \varphi_1(y)$$

كون المشتق الثاني ل z بالنسبة لx معدوم فهذا يعني المشتق الأول ثابت وبما أن المشتق الول ثابت هذا يعني أن z يحوي x من الدرجة الأولى.

$$(4) t = 0 \to \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \to z = \varphi(x)y + \varphi_1(x)$$

$$(5) q = t \to \frac{t}{q} = 1 \ (\text{ولكن}) t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \ \ \&\&\ q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

أي أن البسط مشتق المقام بالمكاملة نجد :

$$\ln(q) = y + \varphi(x) \to e^{\ln(q)} = e^{y+\varphi(x)} \to e^{\ln(q)} = e^{y}.e^{\varphi(x)} \qquad : e^{\varphi(x)} = \varphi(x)$$

$$\to e^{\ln(q)} = \varphi^*(x)e^{y} \to q = \varphi^*(x)e^{y} \to \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi^*(x)e^{y}$$

نكامل بالنسبة ل y ومنه: $z = \varphi^*(x)e^y + \varphi(x)$

كذلك بالنسبة ل $\frac{r}{p} = 1$ $p = r \rightarrow$ ولكن r هو مشتق p كون $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ && $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

بالمكاملة بالنسبة ل x نجد : $\ln(p) = x + \varphi(y)$ ومنه :

$$e^{\ln(p)} = e^{x+\varphi(y)} = e^x . e^{\varphi(y)} : p = \varphi_1(y)e^x$$

نكامل بالنسبة ل x مرة أخرى نجد : $z = \varphi_1(y)e^x + \varphi(y)$

وهو المطلوب......

مسألة القيمة الابتدائية:

هذه المسائل عبارة عن معادلات تفاضلية تحوي شروط ابتدائية تقوم بإعطاء المتغيرات قيم ابتدائية تساعدنا في إيجاد الحل العام لهذه المعادلات.

مثال: حل مسألة القيمة الابتدائية التالية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2xe^t \dots\dots\dots\dots (I)$$

حيث u دالة في المتغيرين المستقلين x, t والشرط الابتدائي $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = e^t , u(0.t) = t$

الحل:

لدينا المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2xe^t$ نكامل بالنسبة ل x ومنه : $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 e^t + F(t) \dots\dots\dots (II)$

بحيث $F(t)$

دالة كيفية لاتحوي x نكامل مرة ثانية لنوجد التابع u ومنه:

$$u = \frac{x^3}{3}e^t + xF(t) + g(t) \dots\dots\dots\dots (III)$$

حيث $g(t)$ دالة كيفية تابعة ل t فقط لا تحوي x والآن بقي علينا إيجاد التابع $F(t), g(t)$

حسب شروط البدء لدينا : $u(0,t) = t \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = e^t$ نعوض الشرط الأول في (II)

$$e^t = 0 + F(t) \to F(t) = e^t$$

الشرط الثاني نعوضه في التابع u أي في(III) ومنه:

$$t = 0 + 0 + g(t) \to g(t) = t \xrightarrow{\text{نعوض } F,g \text{ في التابع } u} u = \frac{x^3}{3} e^t + xe^t + t$$

مسألة القيم الحدية:

إن مسألة القيم الحدية تختلف اختلاف بسيط عن مسألة القيم الابتدائية وذلك بأن مسألة القيم الحدية تكون شروطها بأكثر من قيمة للمتغير المستقل.

مثال: أوجد الحل لمسألة القيم الحدية الآتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x.y : u(0,y) = y^2 \ \&\& \ u(x,1) = \sin(x)$$

حيث $u = u(x,y)$ لإيجاد التابع u علينا بالمكاملة مرتين مرة بالنسبة ل x ومرة بالنسبة ل y

نكامل بالنسبة ل x : تابع يحوي y $(\varphi(y))$: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2} y + \varphi(y)$

نكامل بالنسبة ل y : $u = \frac{x^2}{2} . \frac{y^2}{2} + \varphi_1(y) + p(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

حيث $p(x), \varphi_1(y)$ دوال كيفية لإيجادها من الشروط الابتدائية :

$$u(0,y) = y^2 \quad , \quad y^2 = \varphi_1(y) + p(0) \&\&$$

$$u(x,1) = \sin(x) \xrightarrow{\text{نعوض في} (I)} \sin(x) = \frac{x^2}{4} + \varphi_1(1) + p(x)$$

من الأولى: $y^2 = \varphi_1(y) + p(0) \to \varphi_1(y) = y^2 - p(0)$

من الثانية : $\sin(x) = \varphi_1(1) + p(x) \to p(x) = \sin(x) - \varphi_1(1) - \frac{x^2}{4} \to$

$$p(0) = \sin(0) - \varphi_1(1) - 0 = -\varphi_1(1) \xRightarrow{\text{نعوض } p(x) \text{ و } \varphi_1(y) \text{ في } u} u$$

$$= \frac{x^2y^2}{4} + y^2 - \left(-\varphi_1(1)\right) + \sin(x) - \varphi_1(1) - \frac{x^2}{4} \to$$

$$u = \frac{x^2y^2}{4} + y^2 + \sin(x) - \frac{x^2}{4}$$

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى الغير متجانسة:

نقول عن المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المرتبة الأولى أنها خطية وذلك إذا كانت المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرات من المرتبة الأولى أي من الشكل:

$$P(x,y,z)p + Q(x,y,z)q = R(x,y,z)$$

حيث أن $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ وهي معادلة لاغرانج الغير متجانسة ونسمي المساواة التالية:

$\boldsymbol{\frac{dz}{R} = \frac{dy}{Q} = \frac{dx}{P}}$ **بالجملة الملحقة أو المساعدة.**

مبرهنة:

الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية الغير متجانسة

$$P(x,y,z)p + Q(x,y,z)q = R(x,y,z)$$

يعطى بالشكل $F(u,v) = 0$ حيث أن كل من :

$$u = u(x,y,z) = C_1 \ \&\& \ v = v(x,y,z) = C_2$$

إذا الحل يكون $\boldsymbol{F(C_1, C_2) = 0}$, $\boldsymbol{F(u,v) = 0}$ **بحيث:**

u, v هما تكاملان أوليان للجملة المساعدة وسنرى ذلك في المثال الآتي.

مثال: أوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية أو أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xp + yq = z : P(x,y,z) = x \;\&\; Q(x,y,z) = y \;\&R(x,y,z) = z$$

ومنه الجملة المساعدة $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$

١ ٢ ٣

من (١) و(٢) $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$ بالمكاملة نحصل على:

$$\ln(x) = \ln(y) + \ln(C_1) \to \ln(x) = \ln(yC_1) \to x = C_1 y \to C_1 = \frac{x}{y}$$

$$u = C_1 \to u = \frac{x}{y}$$

من (٢) و(٣) $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dy}{y}$ بمكاملة الطرفين نحصل على :

$$\ln(y) = \ln(z) + \ln(C_2) \to y = C_2 z \to C_2 = \frac{y}{z}$$

$$v = C_2 \to v = \frac{y}{z} \xRightarrow{\text{ومنه الحل هو}} F(u,v) = 0 \to F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

وهو السطح التكاملي $F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$ للمعادلة التفاضلية الجزئية.

تمرين وظيفة(سنورد حله في نهاية المحاضرة): أوجد السطوح التكاملية للمعادلة التالية:

$$(2x - y - z)p + (2y - z - x)q = 2z - y - x$$

معادلة لاغرانج المتجانسة:

معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى متجانسة أي بدون طرف ثاني $R(x,y,z)=0$

فتكون من الشكل $P(x,y,z)p+Q(x,y,z)q=0$ وكذلك تكون الجملة الملحقة:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{0}$$

قد يسأل البعض هل من الممكن أن نضع صفراً في المقام؟؟؟!!!

أصدقائي هذا لا يعبر عن كسر عادي بل يعبر عن نسبة ^_^(أي هذه العملية ممكنة)

ومن النسبة الثانية والثالثة جداء الطرفين بالوسيطين نجد:

$$dz=0\to C_0 z=C_1\to u=z$$

وكذلك v نحصل عليها من النسبة (١) و(٢) ومنه $F(u,v)=0\to F(z,v)=0$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التالية: $yp-xp=0$

الجملة الملحقة هي $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{0}$ حيث $P=y\ \&\ Q=-x$

الحل:

لدينا

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{0}$$

١ ٢ ٣

وجدنا أن $z=C_1=u$ ومن (١) و (٢) نجد:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}\to xdx+ydy=0\to\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_2$$

$$v = C_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

ويكون السطح التكاملي هو : $\boldsymbol{F\left(z, \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) = 0}$

حل تمرين الوظيفة:

أوجد السطوح التكاملية للمعادلة $(2x - y - z)p + (2y - z - x)q = 2z - y - x$

الحل:

معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى غير متجانسة (معادلة لاغرانج الغير المتجانسة)

بالمقارنة نجد أن:

$$P(x, y, z) = 2x - y - z \ \& \ Q(x, y, z) = 2y - z - x \ \&$$

$$R(x, y, z) = 2z - y - x$$

ومنه تكون الجملة الملحقة : $\frac{dz}{R} = \frac{dy}{Q} = \frac{dx}{P}$ وبالتالي :

$$\frac{dx}{2x - y - z} = \frac{dy}{2y - x - z} = \frac{dz}{2z - x - y}$$

من (١) و(٢) $\frac{dy}{2y-x-z} = \frac{dx}{2x-y-z}$ نضرب ونقسم ب (2) ليصبح البسط مشتق المقام في كلا الطرفين ومنه $\frac{1}{2}\frac{2dy}{2y-x-z} = \frac{1}{2}\frac{2dx}{(2x-y-z)}$ بالمكاملة نجد:

$$\frac{1}{2}\ln|2x - y - z| = \frac{1}{2}\ln|2y - x - z| + lnC_1$$

حسب خواص اللوغاريتم

$$\sqrt{2x - y - z} = C_1.\sqrt{2y - x - z} \rightarrow C_1 = \sqrt{\frac{2x - y - z}{2y - x - z}} \rightarrow$$

$$u = C_1 = \sqrt{\frac{2x-y-z}{2y-x-z}}$$

ومن النسبة (٢) و (٣) $\frac{dz}{2z-x-y} = \frac{dy}{2y-x-z}$ كذلك نفس الحال في النسبة السابقة ومنه:

$$\frac{1}{2}\ln|2y-x-z| = \frac{1}{2}\ln|2z-x-y| + \ln C_2 \rightarrow \sqrt{2y-x-z}$$

$$= C_2\sqrt{2z-x-y} \xRightarrow{\text{ومنه....}} C_2 = \sqrt{\frac{2y-x-z}{2z-x-y}} = v$$

وتكون السطوح التكاملية هي :

$$\boldsymbol{F(u,v) = 0 \rightarrow F\left(\sqrt{\frac{2x-y-z}{2y-x-z}}, \sqrt{\frac{2y-x-z}{2z-x-y}}\right) = 0}$$

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه