// تحليل 5 // / /

ملاحظات المحاضرة الأولى والثانية :

مقدمة في تحليل 5 :

1. تعريف الدالة العددية وصفاتها
2_ الدالة المطردة والمحدودة.
3_ نهاية دالة عند النقطة x_0
4_ استمرار دالة.
5_ نقاط الانقطاع وأنواعها
6_ القفزة ومبرهناتها.
7_ الاشتقاق ومبرهناته.
8_ الدوال المركبة.
9_ تمارين.

* مقرر تحليل 5 :
- الدوال ذات التغير المحدود
  1_ مقدمة في تحليل 5
  2_ تعريف
  3_ خواص.
  4_ معايير.
  5_ تطبيقات
- التكامل (ستيلجس)
- مقدمة في نظرية القياس.
- تكامل لوبيغ.

الدالة العددية: هي علاقة تربط كل عنصر من المنطلق بعنصر واحد فقط من المستقر حيث المستقر هو $\mathbb{R}$ أو مجموعة جزئية منها.

$$f : X \to Y$$

حيث $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. $\forall x \in X, \exists!\, y : f(x) = y$.

صفاتها:
هي التباين والغمر والتقابل وكذلك إيجاد التقابل العكسي والدالة الفردية أو زوجية أو لا فردية ولا زوجية.

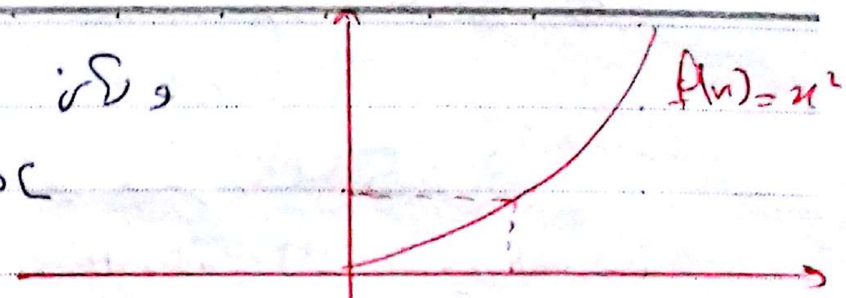
الدالة المطردة: هي الدالة المتناقصة أو المتزايدة أو المتناقصة تماماً أو المتزايدة تماماً. نقول عن الدالة f المعرفة على $[a,b]$ أنها متزايدة على $[a,b]$ إذا تحقق $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ حيث $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

الدالة المعرفة عند x_0: نقول عن الدالة f أنها معرفة عند x_0 إذا كانت $f(x_0)$ هو عدد محدود والعكس نقول عن الدالة f أنها ليست معرفة عند x_0 إذا تحقق $f(x_0)$ يساوي عدد غير محدود.

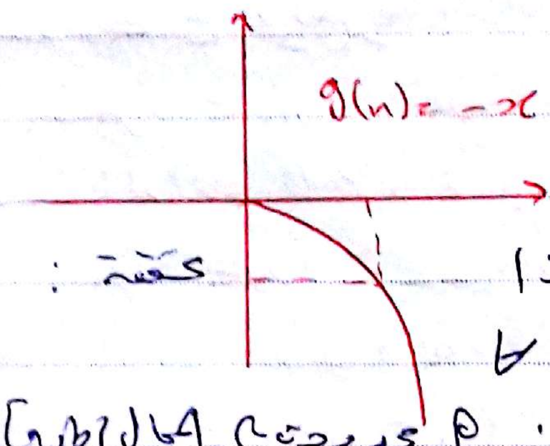
نتائج: [1] إذا كانت f متزايدة على المجال $[a,b]$ فإن $-f$ متناقصة على $[a,b]$ والعكس صحيح.

مثال: الدالة $f(x) = x^2$ هي متزايدة على المجال $[0, \infty[$

* f معرفة ومحدودة على $[\,,\,]$ ⟸ f محدودة + نقاط الانقطاع من النوع الأول + مجموعة نقاط الانقطاع محدودة أو منتهية.



ولكن $g(x) = -f(x) = -x^2$ هي دالة متناقصة على المجال $[0, \infty[$



* **الدالة المحدودة**: f دالة محدودة على المجال $[a,b]$ إذا تحققت:
$\forall x \in [a,b] ; \exists M > 0 ; |f(x)| \le M$

نتائج: • إذا كانت f معرفة ومطردة على المجال $[a,b]$ فإن f محدودة على المجال $[a,b]$

حالة خاصة: إذا كانت f متزايدة ومعرفة على $[a,b]$ فإن $f(x) \le \boxed{f(b)}$

وذلك $\forall x \in [a,b]$.

• **النهايات**: نقول أن الدالة f معرفة في جوار x_0 أو جوار محذوف لـ x_0 إذا

$\exists A \in \mathbb{R} ; \lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} x_0} f(x) = A$

ونرمز لذلك $\lim\limits_{x_0 \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0 + 0)$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0 - 0)$.

• **الاستمرار**: ① شروط الاستمرار ②

نقول عن الدالة f المعرفة عند x_0 أنها مستمرة في x_0 إذا تحقق: أن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار وتساوي القيمة العددية للدالة عند هذه النقطة.
(معرفة الاتزان)

• **الاستمرار على مجال مغلقة**: هو الاستمرار عند كل نقطة من هذا المجال. تحت نقطة انتهاء المجال

• **الاستمرار على مجال مفتوح**: نقول عن الدالة f أنها مستمرة على مجال مفتوح إذا تحققت الشروط:

① $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$

2) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = f(a)$ 3) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} f(x) = f(b)$

• **نقطة الانقطاع وأنواعها**: هي النقطة التي لا تكون الدالة مستمرة عندها.

النوع الأول: أن توجد نهاية من اليمين A ونهاية من اليسار B، ولكن

$\exists A \in \mathbb{R} , \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = A \quad , \exists B \in \mathbb{R} ; \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = B \quad ; A \ne B$

/ /

النوع الثاني: إذا كانت أحد النهايتين تسعى إلى ∞ أو غير موجودة.

النوع الثالث: القابلة للإزالة أي تكون فيها النهاية من اليمين موجودة وتساوي النهاية من اليسار إلا أنها لا تساوي القيمة العددية.

• القفزة وعدد مقدارها: القفزة عند نقطة x_0 لتابع f معرف على المجال $[a,b]$ حيث $x_0 \in [a,b]$ هي: $f(x_0+0) - f(x_0-0)$

إذا كانت f مستمرة فإن القفزة تساوي الصفر. تعني أن النهاية من اليمين تساوي من اليسار.

• القفزة عند x_0 من اليمين $f(x_0+0) - f(x_0)$ اليسار عند x_0 ؟؟

• " " x_0 " اليسار $f(x_0) - f(x_0-0)$

" " a هي $f(a+0) - f(a)$

" " b " $f(b) - f(b-0)$

حيث $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

ملاحظة: * إذا كانت f معرفة على المجال $[a,b]$ ومطردة على المجال $[a,b]$ فإن جميع نقاط الانقطاع من النوع الأول وحيدة.

* مجموعة نقاط الانقطاع للدوال المطردة هي مجموعة محدودة أو منتهية.

* إذا كانت f متزايدة ومعرفة على المجال $[a,b]$ فإن:

$$\left(f(a+0) - f(a)\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k+0) - f(x_k-0)\right) + f(b) - f(b-0) \leq f(b) - f(a)$$

• الاشتقاق: إذا كانت f معرفة على $[a,b]$ نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عند x_0 من $[a,b]$ إذا تحقق الشرط:

$$\exists A \in \mathbb{R} ; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A = f'(x_0)$$

إن المشتق عند نقطة x_0 هو ميل المماس عند تلك النقطة.

• الاشتقاق على مجال مغلق: نقول عن دالة أنها قابلة للاشتقاق على المجال المغلق إذا تحقق:

التعريف عند أي نقطة مختلفة عن أطراف المجال.

(١) -

ALADIB.net منتدى الحضارة

Scanned by CamScanner

2) $\exists D \in \mathbb{R}; \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = D = f'(a+0)$

3) $\exists E \in \mathbb{R}; \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = E = f'(b-a)$

ملاحظة: الاستمرار على مجال يختلف تماما عن الاستمرار في نقطة منه

مثال: $f(x) = x^2$ مستمرة على المجال $]0, \infty[$ ولكن f ليست

مستمرة عند 0 لأنه لا يوجد قيمة للدالة عند الصفر من اليسار (تم أصغر)