بالتعويض بعبارة الـ c_k نجد:

$$c_k = \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!}$$

نعوض بشكل الحل:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$$

$$= 1 + \frac{ab}{1!c} z + \frac{a(a+1)(b+a)}{2!c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(b+1)(a+2)(b+2)b}{3!c(c+1)(c+2)} z^3 + \ldots$$

$$+ \frac{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+k-1)b(b+1)\ldots.(b+k-1)}{c(c+1)(c+2)\ldots.(c+k-1)} z^k + \ldots.$$

$$= F(a, b, c, z)$$

وهو التابع فوق الهندسي هو عبارة عن متسلسلة غير منتهية تكون متقاربة عندما $|z| < 1$ وهذا ينسجم مع وجود نقطة شاذة في جوار الصفر وهو الحل الأول لمعادلة غاوص في جوار الصفر.

أمثلة محلولة

احسب ما يلي:

1) $F(a, b, c, 0) = 1$

2) $F(1, 1, 1, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{k!(1)_k} z^k = \sum_{0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \;\; ; \;\; |z| < 1$

3) $\lim_{a \to \infty} F(a, b, b\frac{z}{a}) = e^z$

ولإيجاد الحل الثاني لمعادلة غوص في جوار الصفر نجري التحويل: $w = z^{1-c} . u$

حيث c لا يساوي أي عدد صحيح موجب باستثناء $c = 1$. وكذلك $1 - c$ هو الجذر الثاني للمعادلة الدليلية في جوار الصفر.

ومنه:

$$w'_2 = (1 - c)z^{-c} . u + z^{1-c} . u'$$
$$w''_2 = - c(1 - c) z^{-c-1} u + 2 (1 - c) z^{-c} . u' + z^{1-c} . u''$$

نعوض بالمعادلة فنجد:

$$z^2(z - 1) u'' + z [2 (1 - c) (z - 1) - c + (1 + a + b) z] u' + (1- c)$$
$$[- c (z - 1) - c + (a + b + 1) z + abz] u = 0$$
$$\Rightarrow z (z - 1) u'' + [(a + b + 3 - 2c) z + c - 2)] u' + [(1 - c)$$
$$(1 + a + b - c) + a b] u = 0$$

بالنظر لهذه المعادلة وللمعادلة الآتية:

$$z (z - 1)u'' + [-c' + (1 + a' + b') z] u'' + a'b' u = 0$$

(معادلة غاوص النموذجية).

نجد بالمقارنة:

$$1)\ 1 + a' + b' = a + b + 3 - 2c$$
$$2)\ c - 2 = -c' \Rightarrow c' = 2 - c$$
$$3)\ a' . b' = (1 - c) (1 + a + b - c) + a . b$$

وهكذا نجد:

$$a'+ b' = a + b + 1 + 1 - c - c = (a + 1 - c) + (b + 1 - c)$$

ومنه:

$$a' = 1 + a - c \ \&\ b' = 1 + b - c$$

ومن ثمَّ:

$$u = F (a', b', c', z)$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(1+a-c)_k (1+b-c)_k}{(2-c)_k\, k!} z^k$$

$$= F(1 + a - c,\ 1 + b - c,\ 2 - c,\ z)$$

c لا يساوي أي عدد صحيح موجب > 2.

ومنه:

$$w_2 = z^{1-c} F(1 + a - c,\ 1 + b - c,\ 2 - c,\ z)$$

ومن ثمّ فإن:

$$w = Aw_1 + Bw_2$$

يمثل حلاً عاماً لمعادلة غاوس في جوار الصفر.

حيث:

$$w_1 = F(a, b, c, z)$$
$$w_2 = z^{1-c} F(1 + a - c,\ 1 + b - c,\ 2 - c,\ z)$$

٢ . ١٠ . ٣ . تمارين محلولة:

تمرين (١):

ابحث في الحل العام للمعادلة:

$$z(z-1)\, w'' + \left(\frac{-3}{2} + 4z\right) w' + 2w = 0$$

في جوار الصفر.

الحل:

بالمقارنة مع الشكل النموذجي لمعادلة غاوس:

$$z(z-1)\, w'' + [-c + (1+a+b)\, z]w' + ab\, w = 0$$

وذلك بملاحظة $z = 0,\ 1,\ \infty$ نقاط شاذة منتظمة و c لا تساوي أي عدد صحيح بالمقارنة نجد:

$$1 + a + b = 4 \ , \ c = \frac{3}{2} \ , \ a \, . \, b = 2$$

$$a = 1 \ \& \ b = 2$$

ومنه نجد:

$$w_1 = F(a, b, c, z) = F\left(1, 2, \frac{3}{2}, z\right)$$

$$\Rightarrow w_1 = \sum_0^\infty \frac{(1)_k (2)_k}{(3/2)_k k!} z^k = \sum_0^\infty \frac{1/2(2)_k}{1/2(3/2)_k} z^k$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1/2(k+1)!}{(1/2)_k} z^k = \sum_0^\infty \frac{1/2(k+1)! 2^{2k} k!}{(2k)!} z^k$$

$$w_1 = \sum_0^\infty \frac{2^{k+1}(k+1)(k!)^2}{(2k!)} z^k$$

$$w_2 = z^{1-c} F(1 + a - c, 1 + b - c \ , 2 - c, z)$$

$$= z^{-1/2} F(1/2, 3/2, 1/2, z)$$

$$= z^{-1/2} \sum_0^\infty \frac{(1/2)_k (3/2)_k}{(1/2)_k k!} z^k = z^{-1/2} \sum_0^\infty \frac{2(1/2)_k}{k!} z^k$$

$$= z^{-1/2} \cdot \sum_0^\infty \frac{2 \cdot (2k)!}{2^{2k} . (k!)^2} z^k$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(2k)!}{2^{2k-1} (k!)^2} z^{k-1/2}$$

ومن ثمَّ:

$$w = Aw_1 + Bw_2$$

تمرين (٢):

أعد نفس السؤال من أجل المعادلة:

$$2z\,(1 - z)\, w'' + (1 - 5z)\, w' - w = 0$$

الحل:

$$z(z-1)w'' + (-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}z)w' + \frac{1}{2}w = 0$$

بالمقارنة مع غاوص النموذجية نجد:

$$1 + a + b = \frac{5}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2} \quad \& \quad c = \frac{1}{2}$$

$$a.b = \frac{1}{2}$$

$$a = 1 \quad , \quad b = \frac{1}{2}$$

$$w_1 = F(a,b,c,z) = F(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},z) = \sum_0^\infty \frac{k!}{k!} z^k = \frac{1}{1-z}$$

$$w_2 = z^{1/2} \sum_0^\infty \frac{(3/2)_k (1)_k}{(3/2)_k k!} z^k = \frac{z^{1/2}}{1-z}$$

$$w = \frac{A}{1-z} + \frac{B\sqrt{z}}{1-z}$$

ملاحظة:

$(1)_k = k!$

$(1/2)_k = (1/2)\,(1/2 + 1) \,\ldots\ldots\, (1/2 + k - 1)$

$$= \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2k-1}{2}$$

$$= \frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2k-1)}{2^k}$$

نضرب بالأعداد الزوجية $2^k k!$ فنجد:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{1.2.3\ldots.(2k-1)(2k)}{2^k.2.4.6\ldots.2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!}$$

تمرين (٣):

أوجد المشتق الأول للتابع فوق الهندسي الآتي:

$$\frac{d}{dz}F(a,b,c,z)=\frac{d}{dz}\left[1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}z^2+\ldots\right]$$

$$=\frac{ab}{c}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}z+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{2!(c+1)(c+2)}z^2+\ldots$$

$$=\frac{a.b}{c}\left(1+\frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)}z+\frac{(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}{2!(c+1)(c+2)}+\ldots\right)$$

$$=\frac{a.b}{c}F(a+1,b+1,c+1,z)$$

تمرين (٤):

برهن صحة العلاقة التالية:

$$\frac{d}{dz}\left[z^{c-1}F(a,b,c,z)\right]=(c-1)z^{c-2}F(a,b,c-1,z)$$

الحل:

$$L_1=\frac{d}{dz}\left(z^{c-1}\left(1+\frac{a.b}{c}z+\frac{ab(a+1)(b+1)}{2c(c+1)}z^2+\ldots\right)\right)$$

$$L_1=\frac{d}{dz}\left[z^{c-1}+\frac{a.b}{c}z^c+\frac{ab(a+1)(b+1)}{2c(c+1)}z^{c+1}+\ldots\right]$$

$$L_1=(c-1)z^{c-2}+\frac{c.ab}{c}z^{c-1}+\frac{(c+1)(a.b)(a+1)(b+1)}{2c(c+1)}z^c$$

$$+(c+2)\frac{ab(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}{3.2c(c+1)(c+2)}z^{c+1}+\ldots$$

نخرج z^{c-2} $(c-1)$ عامل مشترك:

$$L_1 = (c-1)z^{c-2}\left[1+\frac{ab}{c-1}z+\frac{ab(a+1)(b+1)}{2(c-1)c}z^2+\ldots\right]$$

$$= (c-1)\, z^{c-2}\, F(a, b, c-1, z) = L_2$$

تمرين (٥):

برهن صحة العلاقة التالية:

$$F(a, b, b, z) = (1-z)^{-a}$$

الحل:

$$F(a,b,b,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(b)_k\,k!}z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!}z^k = 1+a.z+\frac{a(a+1)}{2!}z^2+\ldots.$$

$$= 1+(-a)(-z)+\frac{(-a)(-a-1)}{2!}z^2+\ldots$$

$$= (1-z)^{-a}$$

تمرين (٦):

برهن صحة العلاقة الآتية:

$$z\, F(1, 1, 2, z) = \ln(1+z)$$

الحل:

$$F(1,1,2,-z) = \sum_{0}^{\infty}\frac{(1)_k\,(1)_k}{(2)_k\,k!}(-z)^k = \sum_{0}^{\infty}\frac{k!k!}{k!(k+1)!}(-z)^k$$

$$\Rightarrow F(1,1,2,-z) = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)}z^{k+1}$$

$$= z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k+1}z^{k+1}+\ldots = \ln(z+1)$$

٢ . ١٠ . ٤ . الطريقة الثانية لإيجاد الحل الخاص الثاني لمعادلة غوص:

نجري التحويل: $u = u(z)$; $w = z^{\lambda_2}.u = z^{1-c}u$

حيث λ_2 هو الجذر الثاني للمعادلة الدليلية بجوار الصفر وبالاشتقاق:

$$w' = (1-c)\, z^{-c}\, u + z^{1-c}\, u'$$
$$w'' = -c\,(1-c)\, z^{-c-1}\, u + 2\,(1-c)\, z^{-c}\, u' + z^{1-c}\, u''$$

نعوض w و w' و w'' في (1) فنجد:

$$-c\,(1-c)\, z^{-c}\,(1-z)\, u + 2\,(1-c)\, z^{1-c}\,(1-z)\, u' + z^{2-c}\,(1-z)\, u'' + c(1-c)\, z^{-c}\, u + c\, z^{1-c}\, u' - (1+a+b)\,(1-c)\, z^{1-c}\, u - (1+a+b)\, z^{2-c}\, u' - ab\, z^{1-c}\, u = 0 \quad ; \quad u = u(z)$$

$$z\,(1-z)\, u'' + 2\,(1-c)\,(1-z)\, u' + c\,(1-c)\, u + c\, u' - (1+a+b)\,(1-c)\, u - (1+a+b)\, z\, u' - ab\, u = 0 \Rightarrow$$

$$z\,(1-z)\, u'' + [(2\,(1-c)+c) + (-2\,(1-c) - (1+a+b))\, z]\, u' + [c\,(1-c) - (1+a+b)\,(1-c) - ab] = 0$$

$$z\,(1-z)\, u'' + [(2-c) + (a+b-2c+3)\, z]\, u' + [(1-c)\,(c-1-a-b) - ab] = 0 \Rightarrow$$

$$z\,(1-z)\, u'' + [(2-c) + (a+b-2c+3)\, z]\, u' - [(c-1)\,(c-1-a-b) - ab]\, u = 0$$

$$\Rightarrow z\,(1-z)\, u'' + [(2-c) + (a+b-2c+3)\, z]\, u' - [(c-a-1)\,(c-b-1)]\, u = 0$$

لكن بملاحظة أن:

$$-(a+b-2c+3) = -(a'+b'+1)$$
$$\Rightarrow a+b-2c+3 = a'+b'+1$$
$$\Rightarrow a'+b' = a+b-2c+2$$
$$\Rightarrow a'+b' = (a-c+1) + (b-c+1)$$
$$a' = a-c+1$$
$$b' = b-c+1$$
$$c' = 2-c$$

$$w_1(z) = F(a-c+1, b-c+1), 2-c, z)$$
$$w_2 = z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z)$$

٢ . ١٠ . ٥ . البحث عن الحل العام لمعادلة غوص في جوار الواحد:

نعلم أن الشكل العام لمعادلة غوص هو:

$$z(1-z)\, w'' + [c-(1+a+b)z]\, w' - ab\, w = 0 \;\; ; \;\; w = w(z) \quad (1)$$

وبحيث a, b, c ثوابت.

من خلال دراستنا لمعادلة غوص تبين أن $z = 1$ هي نقطة شاذة منتظمة لـ (1) ولإيجاد الحل بجوار الواحد نجري التحويل: $t = 1 - z$.

ينتقل الجوار من الواحد إلى الصفر، ومن ثم تظهر لدينا معادلة جديدة بالمتحول t والتابع w عندئذ نقوم بحلها فنحصل على الحل العام لها بجوار الصفر ونعود ونعوض كل $t = 1 - z$ فنحصل على الحل العام لـ (1) بجوار الواحد.

$$t = 1 - z \Rightarrow \frac{dt}{dz} = -1$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt}\left(\frac{dt}{dz}\right) = -\frac{dw}{dt}$$

$$\frac{d2w}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(-\frac{dw}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{dw}{dt}\right)\frac{dt}{dz} = \frac{d2w}{dt^2}$$

نعوض ما سبق في (1) فنحصل على:

$$t(1-t)\, w'' - [c-(1+a+b)(1-t)]\, w' - ab\, w = 0 \;\; ; \;\; w = w(t)$$
$$t(1-t)\, w'' + [(1+a+b-c)-(1+a+b)\, t]\, w' - ab\, w = 0$$

ونلاحظ أن المعادلة الجديدة لها نفس الشكل العام لمعادلة غوص:

$$t(1-t)\, w'' + [c' - (1+a'+b')\, 1]\, w' - a'\, b'\, w = 0$$

ومن ثمّ بالمطابقة نجد أن:

$$\left.\begin{array}{c} c' = 1 + a + b - c \,;\, 1 + a + b = 1 + a' + b' \\ -a.b = -a'.b' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-a\,.\,b = -a'\,.\,b'$$

$$a = a'$$

$$b = b'$$

والأكثر من ذلك سبق أن درسنا شكل المعادلة الجديدة وأوجدنا الحل في جوار الصفر وجدنا عندها الحل الخاص الأول يكتب بالشكل:

$$w_1(t) = F(a', b', c', t) = F(a, b, 1 + a + b - c, t)$$

لنوجد الجذر الثاني:

نجري التحويل: $w = t^{c-a-b}\ u$ حيث $c - a - b$ هو الجذر الثاني للمعادلة الدليلية بجوار الواحد ومنه:

$$w = t^{\mu}\,.\,u \quad ; \quad \mu = c - a - b$$

$$w' = \mu\, t^{\mu-1}\, u + t^{\mu}\, u'$$

$$w'' = \mu\,(\mu - 1)\, t^{\mu-2}\, u + 2\mu\, t^{\mu-1}\, u' + t^{\mu}\, u''$$

بالتعويض نجد:

$$t^{\mu}\,.\,t\,(t-1)\,u'' + [2\mu t(t-1)t^{\mu-1} + [(c-a-b-1) + (a+b+1)t]\, t^{\mu}]\, u' + [\mu\,(\mu - 1)\, t^{\mu-2}\, t(t-1) + \mu\, t^{\mu-1}\, [(c-a-b-1) + (a+b+1)\, t] + ab\, t^{\mu}]\, u = 0$$

بالاختصار على t^{μ}:

$$t\,(t-1)\,u'' + [2\mu\,(t-1) + (c-a-b-1) + (a+b+1)\,t]\,u' + [\mu\,(\mu - 1)\,(t-1)\,t^{-1} + \mu[(c-a-b-1) + (a+b+1)\,t]\,t^{-1} + ab]\,u = 0 \qquad (***)$$

بتبسيط أمثال u:

$$t^{-1}\,[\mu\,(\mu - 1)\,(t-1) + \mu\,[(c-a-b+1) + (a+b+1)\,t] + ab$$
$$= t^{-1}\,\mu\,[(\mu - 1)\,(t-1) + (c-a-b-1) + (a+b+1)\,t] + ab$$

$$= t^{-1}\,\mu\,[(\mu - 1)t - (\mu - 1) + (c - a - b - 1) + (a + b + 1)\,t + ab$$

نخرج الحدود التي فيها t عامل مشترك:

$$= t^{-1}\,\mu\,\{[\mu - 1 + a + b + 1]\,t + [(-a - b - 1 - 1 - \mu + 1)]\} + ab$$
$$= t^{-1}\,\mu\,\{[c - a - b - 1 + a + b + 1]\,t + (c - a - b - 1 - c + a + b + 1) + ab\}$$
$$= t^{-1}\,\mu\,(ct) + ab = \mu\,c + ab = c\,(c - a - b) + ab$$

ولتبسيط الحد في أمثال u':

نفك الأقواس ونعوض μ بقيمها فنجد:

$$(-c + a + b - 1) + (-a - b + 2c + 1)\,t$$

نعوض بالمعادلة (***) فنجد:

$$t\,(t - 1)\,u'' + \{(b + a - c - 1) + (2c - a - b + 1)\,t\}\,u' + \{c(-a - b) + ab]\,u = 0$$

بالنظر للمعادلة الأخيرة نلاحظ أن لها الشكل النموذجي لمعادلة غاوص وبالمقارنة نجد:

$$c' = c - a - b + 1$$
$$1 + a' + b' = 2c - a - b + 1 \Rightarrow a' + b' = 2c - a - b$$
$$\Rightarrow a' + b' = c + c - a - b = (c - a) + (c - b)$$
$$a'\,.\,b' = c(-a - b) + a\,.\,b$$

بحل هاتين المعادلتين:

$$u' = c - a \quad \& \quad b' = c - b$$

ومنه:

$$w_2 = t^{\mu}\,.\,u$$
$$w_2 = t^{c-a-b}\,F(c - a, c - b, c - a - b + 1, t)$$
$$\Rightarrow w_2 = (1 - z)^{c-a-b}\,F(c - a, c - b, c - a - b + 1, 1 - z)$$

ومن ثمَّ الحل العام بجوار الواحد هو:

$$w = A_1 w_1 + A_2 w_2$$

٢.١٠.٦. البحث في حل معادلة غاوص بجوار اللانهاية:

نجري التحويل: $z = \frac{1}{t}$.

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} . \frac{dt}{dz} = -t^2 \frac{dw}{dt}$$

$$w'' = 2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d2w}{dt}$$

نعوض بمعادلة غاوص كل حد بقيمته:

$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} - 1\right)\left[2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d2w}{dt^2}\right] + \left[-c + (a+b+1)\frac{1}{t}\right]\left[t^2 \frac{dw}{dt}\right] + abw = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t}\left(\frac{1-t}{t}\right)t^2\left[2t\frac{dw}{dt} + t^2 \frac{d2w}{dt}\right] + \frac{1}{t}[-ct + (a+b+1)]\left(-t^2 \frac{dw}{dt}\right)$$
$$+ abw = 0$$

$$\Rightarrow (1-t)\left(2t\frac{dw}{dt} + t^2 \frac{d2w}{dt^2}\right) - t[-ct + (a+b+1)]\frac{dw}{dt} + abw = 0$$

نجمع الحدود:

$$t^2(1-t)\frac{d2w}{dt^2} + t[t(c-2) + 2 - a - b - 1]\frac{dw}{dt} + abw = 0$$

وهذه المعادلة ليست غاوص.

لذا نبحث عن حل لهذه المعادلة على شكل متسلسلة صحيحة معممة متزايدة من

الشكل: $w = \sum_0^\infty c_k t^{k+\lambda}$.

بالاشتقاق والتعويض والإصلاح والاختصار على t^λ:

$$\sum_{0}^{\infty}[(k+\lambda)(k+\lambda-1)+(k+\lambda)(1-a-b)+ab]c_k t^k$$
$$+\sum_{0}^{\infty}(c-2)(k+\lambda)-(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k t^{k+1}=0$$

$$t^0: \lambda(\lambda-1)+\lambda(1-a-b)+ab=0$$
$$\lambda^2-\lambda+(1-a-b-1)\lambda+ab=0$$
$$\lambda^2+\lambda(1-a-b-1)+ab=0$$
$$\lambda^2-\lambda(a+b)+a\,.\,b=0 \Rightarrow \lambda_1=a \wedge \lambda_2=b$$

نتابع عملية المطابقة:

$$c_k=\frac{(k+a-1)(k+a-c)}{k(k+a-b)}c_{k-1} \quad ; \quad k\geq 1$$

نعطي قيماً لـ k ونضرب العلاقات الناتجة طرفاً لطرف فنجد:

$$c_k=\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(k+a-1)(a-c+1)(a-c+2)\ldots(a-c+k)}{k!(a-b-+1)(a-b+2)(a-b+3)\ldots.(a-b+k)}c_0$$

$$\Rightarrow c_k=\frac{(a)_k(a-c+1)_k}{k!(a-b+1)_k} \quad ; \quad c_0=1$$

$$w_1=\sum_{0}^{\infty}c_k t^{k+\lambda}=t^{\lambda}\sum_{0}^{\infty}c_k t^k=t^a\sum_{0}^{\infty}c_k t^k$$

$$\Rightarrow w_1=t^a\sum_{0}^{\infty}\frac{(a)_k(a-c+1)_k}{k!(a-b+1)_k}t^k$$
$$=t^a F(a,a-c+1,a-b+1,t)$$
$$\Rightarrow w_1=\frac{1}{z^a}F(a,a-c+1,a-b+1,\frac{1}{z})$$

بشكل مشابه نجد:

$$w_2=\frac{1}{z^b}F(b,b-c+1,b-a+1,\frac{1}{z})$$