مبرهنة:

لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$ علماً أن هو الناتج $(A,(\pi_i: A\to A_i))_{i\in I}$ عندئذٍ:

1- لأجل كل $i\in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i: A_i \to A$ بحيث:

$$\pi_i \alpha_i = I_{A_i}$$

2- أياً كان $i\in I$ فإن المورفيزم π_i إبيمورفيزم.

البرهان:

لنفرض أن الناتج $(A,(\pi_i)_{i\in I})$ هو الناتج للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ أياً كان $X\in Ob(\mathcal{C})$ فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)$$

المعرف بالشكل: $\forall f\in\mathcal{L}(X,A)\quad \Gamma(f)=(\pi_i f)_{i\in I}$

متباين وغامر.

- لنأخذ التطبيق الناتج: / لأجل كل $j\in I$ يوجد دوماً تطبيق غامر / .

$$\Gamma_j: \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A_j)$$

المعرف بالشكل: $\Gamma_j((v_i)_{i\in I}) = v_j$

عندئذٍ:

$$\Gamma_j\cdot\Gamma: \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A_j)$$

تطبيق غامر / لأنه تركيب لتطبيقين غامرين / .

لأجل $X=A_j$ نجد أن: $I_{A_j}\in\mathcal{L}(A_j,A_j)$ ومنه يوجد $\alpha_j\in\mathcal{L}(A_j,A)$

بحيث: $\Gamma_j\cdot\Gamma(\alpha_j)=I_j$ / وذلك لأنه غامر: أي أنه أياً كان عنصراً I_j

من المستقر $\mathcal{L}(A_j,A_j)$ يوجد عنصر α_j من $\mathcal{L}(A_j,A)$ بحيث يكون: $\Gamma_j\Gamma(\alpha_j)=I_j$

حسب تعريف Γ نجد:

$$\Gamma_j \cdot \Gamma(x_j) = \Gamma_j(\Gamma(x_j)) = \Gamma_j((\pi_i \cdot x_j)_{i\in I}) = \pi_j \cdot x_j = I_{A_j}$$

حسب تعريف Γ_j

(2): لأجل كل $i \in I$ لدينا: $\pi_i : A \longrightarrow A_i$

لنبرهن على أن التطبيق:

$$\beta : \mathcal{L}(A_i , X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\beta(\lambda) = \lambda \cdot \pi_i \qquad \forall \lambda \in ob(\mathcal{L})$$

متباين / إذا أثبتنا أن التطبيق β متباين يكون π_i إبيمورفيزم /

ليكن $\lambda, \mu \in \mathcal{L}(A_i, X)$ حيث:

$$\beta(\lambda) = \beta(\mu)$$

$$\lambda \cdot \pi_i = \mu \cdot \pi_i$$

وحسب (1) يوجد $x_i : A_i \longrightarrow A$ حيث: $\pi_i \cdot x_i = I_{A_i}$

ومنه نجد أن: $(\lambda \cdot \pi_i) x_i = \mu \cdot (\pi_i \cdot x_i)$

$$\Rightarrow \lambda \cdot I_{A_i} = \mu \cdot I_{A_i}$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu$$

ومنه β متباين والمورفيزم π_i إبيمورفيزم $\forall i \in I$

تعريف: نقول عن الفئة $\mathcal{L}$ إنها فئة جداء (جداءات) إذا كانت كل أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ تملك جداء.

- كل من الفئات التالية هي فئة جداء:

فئة المجموعات - فئة الزمر - فئة الزمر التبديلية - فئة المودولات فوق حلقة واحدية.

نقول عن الفئة $\mathcal{L}$ أنها فئة جداء منتهي إذا كانت كل أسرة منتهية من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ تملك جداء.

المجاميع :

- إن مفهوم المجاميع في الفئات هو تعميم لمفهوم المجموع المباشر .

تعريف :

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ ، ولتكن $(u_i : A_i \longrightarrow A)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$ حيث $A\in ob(\mathcal{L})$

نقول إن الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ أنها تشكل مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ إذا كان لأجل أي أسرة أخرى $(v_i : A_i \longrightarrow B)_{i\in I}$ من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$ يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : A \longrightarrow B$ يحقق :

$$\alpha\cdot u_i = v_i \qquad \forall\, i\in I$$

أي أن

$$(\alpha\cdot u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

نبين ذلك حسب المخطط التالي :

$$\begin{tikzcd} B & A \arrow[l, "\alpha"'] \\ & A_i \arrow[u, "u_i"'] \arrow[ul, "v_i"] \end{tikzcd}$$

مبرهنة : لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ ولنأخذ الثنائية $(A,(u_i : A_i \longrightarrow A)_{i\in I})$ حيث $A\in ob(\mathcal{L})$ و أن $(u_i : A \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$.

عندئذ الشروط الآتية متكافئة :

1. الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ تشكل مجموعاً لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$
2. لأجل كل $X\in ob(\mathcal{L})$ فإن التطبيق :

$$\Gamma : \mathcal{L}(A,X) \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{L}(A_i, X)$$

المعرف بالشكل :

$$\forall\, \lambda\in\mathcal{L}(A,X) \qquad \Gamma(\lambda) = (\lambda\cdot u_i)_{i\in I}$$

متباين و غامر .

برهان: من (1) ⇐ (2):

- لنفرض أن الثنائية $(A,(U_i)_{i\in I})$ مجموعاً لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$

- إن Γ تطبيقة لأن:

لأجل كل $\lambda,\mu\in\mathcal{L}(A,X)$ بحيث:

$$\lambda=\mu \Rightarrow$$
$$\lambda.u_i=\mu.u_i \quad \forall i\in I$$
$$(\lambda.u_i)_{i\in I}=(\mu.u_i)_{i\in I}$$
$$\Gamma(\lambda)=\Gamma(\mu)$$

- لنعرف:

$$\Gamma^{-1}:\pi\mathcal{L}(A_i,X)\longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$$
$$\Gamma^{-1}((v_i)_{i\in I})=\alpha\ ;\quad \alpha.u_i=v_i,\ \forall i\in I$$

حسب التعريف [illegible]

واضح أن Γ^{-1} تطبيقة.

- لنبرهن على أن: $\Gamma^{-1}.\Gamma=I_{\mathcal{L}(A,X)}$ ، $\Gamma.\Gamma^{-1}=I_{\pi\mathcal{L}(A_i,X)}$

إن $\Gamma.\Gamma^{-1}=I_{\pi_{i\in I}\mathcal{L}(A_i,X)}$ لأن:

$$\forall (w_i)_{i\in I}\in\pi_{i\in I}\mathcal{L}(A_i,X)\ ;\ \Gamma\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I})=\Gamma(\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}))=$$
$$\alpha.u_i=w_i \text{ حيث } =\Gamma(\alpha)=(\alpha.u_i)_{i\in I}=(w_i)_{i\in I}$$
$$\Rightarrow \Gamma.\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I})=w_i \Rightarrow \Gamma.\Gamma^{-1}=I_{\pi_{i\in I}\mathcal{L}(A_i,X)}$$

إن $\Gamma.\Gamma^{-1}=I_{\mathcal{L}(A,X)}$ لأن:

$$\forall\lambda\in\mathcal{L}(A,X)\ ;$$
$$\Gamma^{-1}.\Gamma(\lambda)=\Gamma^{-1}(\Gamma(\lambda))=\Gamma^{-1}((\lambda.u_i)_{i\in I})=\lambda$$

ومنه فإن:
$$\Rightarrow \Gamma^{-1}.\Gamma(\lambda)=\lambda\Rightarrow\Gamma^{-1}.\Gamma=I_{\mathcal{L}(A,X)}$$

وبالتالي Γ متباين وغامر

من (2) ⟸ (1) لنفرض أن التطبيق Γ متباين وغامر،

لتكن $(v_i: A_i \longrightarrow B)$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$

ولأجل $X = B$ نجد أن:

$$(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{L}(A_i, B)$$

ولما كان Γ غامر، يوجد $\alpha \in \mathcal{L}(A, B)$ بحيث:

$$\Gamma(\alpha) = (v_i)_{i\in I}$$

وحسب تعريف Γ فإن:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha \cdot u_i)_{i\in I}$$

ونجد أن $(v_i)_{i\in I} = (\alpha \cdot u_i)_{i\in I}$

. لنثبت أن α وحيد

ليكن $\beta \in \mathcal{L}(A, B)$ يحقق $\beta \cdot u_i = v_i \quad \forall i \in I$

نجد أن:

$$\Gamma(\beta) = (\beta \cdot u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I} = (\alpha \cdot u_i)_{i\in I} = \Gamma(\alpha)$$

ولما كان Γ متباين نجد:

$$\alpha = \beta$$

وهذا يبين أن الثنائية $(A, (U_i)_{i\in I})$ مجموع الأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$

مبرهنة (2): لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$،
ولنفرض أن كلاً من $(B, v_i: A_i \longrightarrow B)_{i\in I}$ ، $(A, (U_i: A_i \longrightarrow A)_{i\in I})$
مجموعاً لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ:
يوجد ايزومورفيزم وحيد $\alpha: A \longrightarrow B$

البرهان:

لما كانت الثنائية $(A, (U_i)_{i\in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه لأجل
أسرة المورفيزمات v_i ، يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: A \longrightarrow B$
حيث: $\alpha \cdot u_i = v_i \quad \forall i \in I$

أيضاً لما كانت الثنائية $(B,(v_i)_{i\in I})$ تجمعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه يوجد مورفيزم $\beta: B \to A$ بحيث $\beta . v_i = u_i \quad \forall i\in I$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "\alpha"] & B \arrow[l, "\beta"'] \\ & A_i \arrow[ul, "u_i"] \arrow[u, "v_i"'] \end{tikzcd}$$

لأجل الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathcal{L}(A,X) \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{L}(A_i,X)$$

$$\forall \lambda\in\mathcal{L}(A,X) \quad \Gamma(\lambda)=(\lambda.u_i)_{i\in I}$$

متباين دوماً $\forall X\in ob(\mathcal{L})$

ولأجل $X=A$ نجد أن: $\beta.\alpha\in\mathcal{L}(A,A)$

$$\Gamma(\beta.\alpha) = ((\beta.\alpha).u_i)_{i\in I} = (\beta.(\alpha.u_i))_{i\in I} = (\beta.v_i)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$$

أيضاً لما كان: $I_A\in\mathcal{L}(A,A)$

$$\Gamma(I_A) = (I_A.u_i)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$$

$$\Longrightarrow \Gamma(\beta.\alpha)=\Gamma(I_A) \xRightarrow{\Gamma \text{ متباين}} \beta.\alpha = I_A$$

أيضاً لما كانت الثنائية $(B,(v_i)_{i\in I})$ تجمعاً فإن التطبيق:

$$\Gamma': \mathcal{L}(B,X) \longrightarrow \prod\mathcal{L}(A_i,X)$$

$$\forall\lambda\in\mathcal{L}(B,X)\quad \Gamma'(\lambda)=(\lambda.v_i)_{i\in I}$$

متباين دوماً $\forall X\in ob(\mathcal{L})$

ولأجل $X=B$ نجد أن: $\alpha.\beta\in\mathcal{L}(B,B)$

$$\Gamma'(\alpha.\beta) = ((\alpha.\beta).v_i)_{i\in I} = (\alpha.(\beta.v_i))_{i\in I} = (\alpha.u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

أيضاً لما كان: $I_B\in\mathcal{L}(B,B)$

$$\Gamma'(I_B) = (I_B.v_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

ومنه نجد أن:

$$\Gamma'(\alpha.\beta) = \Gamma'(I_B)$$

وبما أن Γ' متباين $\Longrightarrow \alpha.\beta = I_B$

ومنه فإن α إيزومورفيزم.

انتهت المحاضرة.