

سمجة:
 لنكن \mathcal{L} فئة $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{L} تلك عبارة عن الثانية
 $(A_i, \pi_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ عشية:

ار لأجل كل $i \in I$ يوجد مورفيزم $A \rightarrow A_i$ حيث:
 $\pi_i \circ \alpha_i = I_{A_i}$

ع أيا كان $i \in I$ فإن المورفيزم π_i إبيومورفيزم.

البرهان:
 لنفرض أن الثانية $(A_i, \pi_i)_{i \in I}$ أسرة $(A_i)_{i \in I}$ عشية أيا كان $A \in \text{Ob } \mathcal{L}$
 فإن التطبيقه:

المعرف بالكل:
 $\Gamma(A) = (\pi_i)_{i \in I}$
 $\Gamma: \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{L}(X, A_i)$
 $\forall \varphi \in \mathcal{L}(X, A)$

متباين دفاخر.

لنأخذ التطبيقه الدافر: / لأجل كل $j \in I$ يوجد دوماً تطبيقه دفاخر /

المعرف بالكل:
 $\Gamma_j: \prod_{i \in I} \mathcal{L}(X, A_i) \rightarrow \mathcal{L}(X, A_j)$
 $\Gamma_j((\varphi_i)_{i \in I}) = \varphi_j$

عشية:

$\Gamma_j \circ \Gamma: \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, A_j)$

تطبيقه دفاخر / لأنه تركيبه لتطبيقين دفاخرين /

لأجل $X = A_j$ فإن: $I_{A_j} \in \mathcal{L}(A_j, A_j)$ ومنه يوجد $\alpha_j \in \mathcal{L}(A_j, A)$

حيث: $\Gamma_j \circ \Gamma(\alpha_j) = I_{A_j}$ / وذلك لأنه دفاخر: أي أن α_j كان عشية

من المسفر $\mathcal{L}(A_j, A)$ يوجد عنصره من $\mathcal{L}(A_j, A)$ حيث يكون: $\Gamma_j \circ \Gamma(\alpha_j) = I_{A_j}$

تعريف Γ_j :

$$\Gamma_j \cdot \Gamma(\infty_j) = \Gamma_j(\Gamma(\infty_j)) = \Gamma_j((\pi_j, \infty_j), e_1) = \pi_j \cdot \infty_j = I_{A_j}$$
 حسب تعريف Γ_j

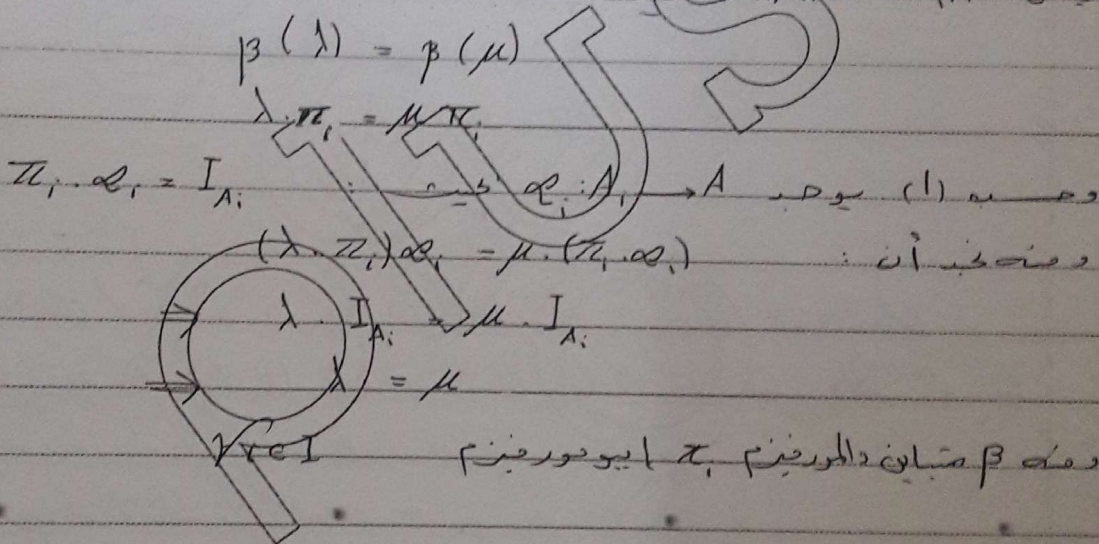
(2) : لا عمل كل $\lambda \in I$ لدينا : $\pi_j : A \rightarrow A_j$

لنهن على أن الطبيعة :

$$\beta : \mathcal{L}(A_i, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\beta(\lambda) = \lambda \cdot \pi_j \quad \forall \lambda \in \text{ob}(\mathcal{L})$$

متباين / إذا ثبت أن الطبيعة β متباين يكون π_j ايونورفينم /
 لكن $\lambda, \mu \in \mathcal{L}(A_i, X)$



تعريف : نقول عن القته كـ اناقته حراء (حداات) اذا كانت كل أسرة من أشياء القته كـ تملك حراء كل من القات التالية هي قته حراء :
 فئة المجموعات - فئة الزمر - فئة الزمر التبيلية - فئة المودلات فوق حلقة ماخصية
 نقول عن القته كـ اناقته حراء متري اذا كانت كل أسرة متشعبة من أشياء القته كـ تملك حراء

المجايع .

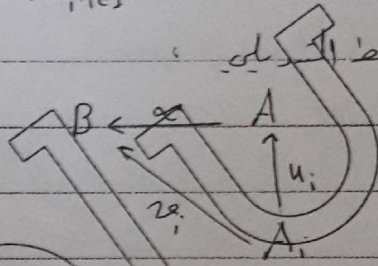
- إن مفهوم المجايع و الفئات هو تعميم لمفهوم المجموع المباشر
تعريف :

لتكن \mathcal{L} فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{L} ، و لتكن
 $(u_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة \mathcal{L} حيث $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$
 نقول أن الناتجة $(A, (u_i)_{i \in I})$ أنها تشكل مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ إذا كان
 لأجل أي أسرة أخرى $(v_j: B_j \rightarrow B)_{j \in J}$ من مورفيزمات الفئة \mathcal{L} يوجد
 مورفيزم وحيد $\alpha: A \rightarrow B$ يحقق :

$$\alpha \cdot u_i = v_i \quad \forall i \in I$$

$$(\alpha \cdot u_i)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

أي أن
 يبين ذلك حساب المخطط التالي



مبرهنة : لتكن \mathcal{L} فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{L}
 ولناخذ الناتجة $(A, (u_i)_{i \in I})$ حيث $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$ و إذا كان
 أسرة من مورفيزمات الفئة \mathcal{L}
 عندئذ الشروط الآتية متكافئة :

- الناتجة $(A, (u_i)_{i \in I})$ تشكل مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$
- لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathcal{L})$ فإن التطبيق :

$$\Gamma: \mathcal{L}(A, X) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{L}(A_i, X)$$

المرد بالشكل :

$$\forall \lambda \in \mathcal{L}(A, X) \quad \Gamma(\lambda) = (\lambda \cdot u_i)_{i \in I}$$

متباينة د غامر .

برهان: من (1) \Leftarrow (2)

لتفرض أن التماثل $(A, (u_i)_{i \in I})$ مجموعاً لأسره الأسياد $(A_i)_{i \in I}$
 إن Γ تطبيقه لأن:

لا محل كل $\lambda, \mu \in \mathcal{L}(A, X)$ حيث:

$$\lambda = \mu \Rightarrow$$

$$\lambda \cdot u_i = \mu \cdot u_i \quad \forall i \in I$$

$$(\lambda \cdot u_i)_{i \in I} = (\mu \cdot u_i)_{i \in I}$$

$$\Gamma(\lambda) = \Gamma(\mu)$$

لنفرض:

$$\Gamma^{-1}: \pi \mathcal{L}(A_i, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I}) = \infty \quad ; \quad \infty \cdot u_i = v_i \quad \forall i \in I$$

منه التعميم يمكن ∞ ∞
 ونحن أن Γ^{-1} تطبيقه

$$\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\pi \mathcal{L}(A_i, X)}$$

$$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{\mathcal{L}(A, X)}$$

لنصن على أن $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\pi \mathcal{L}(A_i, X)}$
 لأن $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\pi \mathcal{L}(A_i, X)}$

$$\forall (w_i)_{i \in I} \in \pi \mathcal{L}(A_i, X) \quad \Gamma \Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = \Gamma(\Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I})) =$$

$$\infty \cdot u_i = w_i \quad \forall i \in I \quad \Rightarrow \Gamma(\infty) = (w_i)_{i \in I}$$

$$\Rightarrow \Gamma \Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = (w_i)_{i \in I} \Rightarrow \Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\pi \mathcal{L}(A_i, X)}$$

$$\text{لأن } \Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\pi \mathcal{L}(A_i, X)}$$

$$\forall \lambda \in \mathcal{L}(A, X) ;$$

$$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma(\lambda) = \Gamma^{-1}(\Gamma(\lambda)) = \Gamma^{-1}((\lambda \cdot u_i)_{i \in I}) = \lambda$$

$$\Rightarrow \Gamma^{-1} \cdot \Gamma(\lambda) = \lambda \Rightarrow \Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{\mathcal{L}(A, X)}$$

منه فإن:

والتالي Γ متباين ومثالي

من (2) \Leftarrow (1) لنفرض أن التطبيق Γ متباين ونأمر ،
 لكن $(B, \nu, A, \nu_i)_{i \in I}$ أسرة من مورفزمات الفترة L
 ولأجل $X=B$ نجد أن :

$$(\nu_i)_{i \in I} \in \pi_L(A_i, B)$$

ولما كان Γ متباين ، يوجد $\alpha \in \mathcal{L}(A, B)$ حيث :

$$\Gamma(\alpha) = (\nu_i)_{i \in I}$$

وهو تعريف Γ فإن :

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha \cdot u_i)_{i \in I}$$

$$(\nu_i)_{i \in I} = (\alpha \cdot u_i)_{i \in I}$$

منه نجد أن

لنبت أن $\alpha \in \mathcal{L}(A, B)$

$$\forall i \in I$$

$$\beta \cdot u_i = \nu_i$$

ليكن $\beta \in \mathcal{L}(A, B)$ طبقاً

لنبت أن :

$$\Gamma(\beta) = (\beta \cdot u_i)_{i \in I} = (\nu_i)_{i \in I} = (\alpha \cdot u_i)_{i \in I} = \Gamma(\alpha)$$

ولما كان Γ متبايناً نجد :

$$\alpha = \beta$$

وهذا يبين أن التناهي $(A, (u_i)_{i \in I})$ هو بالأسرة الأشياء $(A_i)_{i \in I}$

مرحلة 2: لنكن L فترة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من الأشياء الفترة L

ولنفرض أن كلاً من $(A, (u_i)_{i \in I})$ ، $(B, \nu_i)_{i \in I}$

عبراً للأسرة الأشياء $(A_i)_{i \in I}$ عندها :

يوجد ايزومورفزم وحيد $\alpha: A \rightarrow B$

لبرهان :

لما كانت التناهي $(A, (u_i)_{i \in I})$ عموماً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإنه لأجل

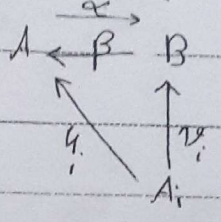
أسرة المورفزمات ν_i يوجد مورفزم وحيد $\alpha: A \rightarrow B$

$$\forall i \in I$$

$$\alpha \cdot u_i = \nu_i$$

حيث :

أولاً كتابتنا الناتجة $(B, (v_i)_{i \in I})$ فوق الأساس $(A_i)_{i \in I}$ فإنه يوجد مورفيزم $\beta: B \rightarrow A$ حيث $\beta \cdot v_i = u_i$ $\forall i \in I$



لأجل الناتجة $(A, (u_i)_{i \in I})$ فإن الخريطة:

$$\Gamma: \mathcal{L}(A, X) \rightarrow \mathcal{L}(A_i, X)$$

$$\forall \lambda \in \mathcal{L}(A, X) \quad \Gamma(\lambda) = (\lambda \cdot u_i)_{i \in I}$$

متباين دماير $\forall X \in \text{ob}(\mathcal{L})$

ولأجل $X=A$ نجد أن $\beta \in \mathcal{L}(A, A)$

$$\Gamma(\beta) = ((\beta \cdot u_i)_{i \in I}) = (\beta \cdot (u_i)_{i \in I}) = (\beta \cdot v_i)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I}$$

أي إذا كان $I \in \mathcal{L}(A, A)$

$$\Gamma(I_A) = (I_A \cdot u_i)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I}$$

$$\Rightarrow \Gamma(\beta) = \Gamma(I_A) \quad \text{فبتباين } \beta = I_A$$

أولاً كتابتنا الناتجة $(B, (v_i)_{i \in I})$ فوق الأساس $(A_i)_{i \in I}$ فإنه يوجد مورفيزم:

$$\Gamma': \mathcal{L}(B, X) \rightarrow \mathcal{L}(A_i, X)$$

$$\forall \lambda \in \mathcal{L}(B, X) \quad \Gamma'(\lambda) = (\lambda \cdot v_i)_{i \in I}$$

متباين دماير $\forall X \in \text{ob}(\mathcal{L})$

ولأجل $X=B$ نجد أن $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{L}(B, B)$

$$\Gamma'(\alpha \cdot \beta) = ((\alpha \cdot \beta) \cdot v_i)_{i \in I} = (\alpha \cdot (\beta \cdot v_i))_{i \in I} = (\alpha \cdot u_i)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

أي إذا كان $I_B \in \mathcal{L}(B, B)$

$$\Gamma'(I_B) = (I_B \cdot v_i)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

ومنه نجد أن:

$$\Gamma'(\alpha \cdot \beta) = \Gamma'(I_B)$$

$$\alpha \cdot \beta = I_B \quad \leftarrow \text{دعنا نثبت متباين } \Gamma$$

ومنه فإن α يرد مورفيزم

التي هي المراجعة