تطبيقات نظرية الفئات

المحاضرة 10

السنة الرابعة   د. حمزة الحاكمي   الفصل الثاني

تكافؤ الفئات

إن مفهوم تكافؤ الفئات هو تعميم لمفهوم التماثل في البنى الجبرية

/ قبل تعريف التكافؤ سنحتاج لتعريف جداء دالي مع مورفيزم دالي وجداء مورفيزم دالي مع دالي وذلك من خلال التعريفين الآتيين /

تمهيدية:

لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات ولنفرض أن:

$T:\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ ، $F, G: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة.

عندئذ: لأجل كل مورفيزم دالي $\varphi: F \to G$

يوجد مورفيزم دالي: $T.\varphi : T.F \to T.G$

معرف بالشكل الآتي:

$\forall A\in ob(\mathcal{L}_1) ,\ T.\varphi(A) = T(\varphi(A))$

البرهان:

/ بما أن G ، F ، T دوال مباشرة، وتركيب دالتين مباشرتين هو دالي مباشر يكون لدينا /

$T.F, T.G: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$ داليين مباشرين.

/ وبين أي داليين مباشرين نستطيع تعريف مورفيزم دالي /

وبالتالي لنعرف $T.\varphi: T.F \to T.G$

بالشكل: $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1)$

$\varphi(A): F(A) \to G(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$

وأن $T(\varphi(A)): T(F(A)) \to T(G(A))$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$

وحسب تعريف $T.\varphi$ ، $T.\varphi(A): T.F(A) \to T.G(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$

وبالتالي الشرط الأول من شروط المورفيزم الدالي محقق ، نتحقق به:

لأجل كل شيء من أشياء الفئة الأولى، تكون صورته مورفيزم للفئة الثالثة
أي بالنسبة للتركيبة: من سيإثبات أن: $T.\varphi : T.F \longrightarrow T.G$ مورفيزم دالي
إذن يكفي لـ $T.\varphi$ نثبت أنه $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1)$ يكون: $T.\varphi(A)$
مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$ /

- للتحقق من الشرط الثاني / المخطط تبديلي/:
ليكن: $u: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$، لنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} T.F(A) \arrow[r, "T.\varphi(A)"] \arrow[d, "T.F(u)"'] & T.G(A) \arrow[d, "T.G(u)"] \\ T.F(B) \arrow[r, "T.\varphi(B)"] & T.G(B) \end{tikzcd}$$

بما أن أشياء ومورفيزمات هذا المخطط من الفئة $\mathcal{L}_3$

أي لنبرهن:

$$T.G(u) \,.\, T.\varphi(A) = T.\varphi(B) \,.\, T.F(u)$$

لنأخذ الطرف الأول:

$$T.G(u) \,.\, T.\varphi(A) \underset{\uparrow}{=} T(G(u)) \,.\, T(\varphi(A)) \underset{\uparrow}{=} T(\underbrace{G(u) \,.\, \varphi(A)}_{\star})$$

$T.\varphi$ حسب تعريف T دالي مباشر

وبما أن φ مورفيزم دالي وأن $u: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$ فإن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "\varphi(B)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

أي أن: $G(u).\varphi(A) = \varphi(B).F(u)$ بالتعويض في $\star$ نجد أن:

$$T.G(u) \,.\, T.\varphi(A) = T(\varphi(B) \,.\, F(u)) \underset{\uparrow}{=} T.\varphi(B) \,.\, T.F(u)$$

T دالي مباشر

ومنه المخطط تبديلي، أي أن $T.\varphi$ مورفيزم دالي

مبرهنة (2): لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات ولنفرض أن:

$T: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, $F, G: \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ دوال مباشرة

عندئذ: لأجل كل مورفيزم دالي ψ:

$$\psi: F \to G$$

يوجد مورفيزم دالي: $\psi.T: F.T \to G.T$

معرف بالشكل الآتي:

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1), \ \psi.T(A) = \psi(T(A))$$

البرهان: لدينا $F.T, G.T: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$ دوال مباشرة.

لنعرف $\psi.T: F.T \to G.T$

بالشكل: أياً كان $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ فإن:

$$T(A) \in ob(\mathcal{L}_2)$$

ولما كان ψ مورفيزم دالي فإن $\psi.T(A) = \psi(T(A))$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$

أي أن الشرط الأول من شروط المورفيزم الدالي محقق.

- الشرط الثاني: ليكن $u: A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي.

$$\begin{tikzcd}
F.T(A) \arrow[r, "\psi.T(A)"] \arrow[d, "F.T(u)"'] & G.T(A) \arrow[d, "G.T(u)"] \\
F.T(B) \arrow[r, "\psi.T(B)"] & G.T(B)
\end{tikzcd}$$

أي لنبرهن أن: $G.T(u) . \psi.T(A) = \psi.T(B) . F.T(u)$

ولما كان $u: A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$.

طالما T دالي مباشر $T(u): T(A) \to T(B)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$

ولما كان: $\psi: F \to G$ مورفيزم دالي

فإن المخطط الآتي تبديلي.

$$\begin{tikzcd}
F.T(A) \arrow[r, "\psi(T(A))"] \arrow[d, "F.T(u)"'] & G.T(A) \arrow[d, "G.T(u)"] \\
F.T(B) \arrow[r, "\psi(T(B))"] & G.T(B)
\end{tikzcd}$$

أي أن: $G.T(u) \,.\, \psi(T(A)) = \psi(T(B)) \,.\, F.T(u)$

وحسب تعريف $\psi.T \Leftarrow$

$$G.T(u) \,.\, \psi.T(A) = \psi.T(B) \,.\, F.T(u)$$

ومن المخطط نستنتج أن $\psi.T$ مورفيزم دالي.

تعريف: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين و $F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دالي مباشر نقول أن F هو تكافؤ فئات إذا وجد دالي مباشر

$$G: \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1$$

وايزومورفيزمان داليان $\varphi: I_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G.F$ دالي مطابق على $\mathcal{L}_1$

$\psi: I_{\mathcal{L}_2} \longrightarrow F.G$ دالي مطابق على $\mathcal{L}_2$

يحققان: $F.\varphi = \psi.F$

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين و $F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دالي مباشر، إذا كان الدالي F تكافؤ فئات عندئذٍ:

1- أياً كان $A, B \in ob(\mathcal{L}_1)$ فإن التطبيق:

$$F_{A,B}: \mathcal{L}_1(A,B) \longrightarrow \mathcal{L}_2(F(A), F(B))$$

متباين وغامر.

2- لأجل كل $M \in ob(\mathcal{L}_2)$ يوجد $N \in ob(\mathcal{L}_1)$ بحيث:

$F(N) \cong M$ /وهذا يعبر عن الغمر بمفهوم التماثل/

إثبات (1):

لما كان F تكافؤ فئات فإنه يوجد دالي مباشر:

$$G: \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1$$

وايزومورفيزمات دالية:

$$\varphi: I_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G.F$$

$$\psi: I_{\mathcal{L}_2} \longrightarrow F.G$$

وحققان : $F \cdot \varphi = \psi \cdot F$.

1- لما كان F دالي فإن $F_{A,B}$ تطبيقه .

لنثبت أن التطبيق $F_{A,B}$ متباين :

أياً كان $A, B \in ob(\mathcal{L}_1)$ ليكن :

$$\left.\begin{array}{l} u : A \longrightarrow B \\ v : A \longrightarrow B \end{array}\right) \in \mathcal{L}_1(A,B)$$

بحيث : $F(u) = F(v)$

ولما كان G دالي مباشر فإن : $G.F(u) = G.F(v)$

ولما كان φ مورفيزم دالي وأنه إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$ فإن المخطط الآتي تبديلي :

$A \in ob(\mathcal{L}_1) \Rightarrow I_{\mathcal{L}_1}(A) = A$

$B \in ob(\mathcal{L}_1) \Rightarrow I_{\mathcal{L}_1}(B) = B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "u"'] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(u)"] \\ B \arrow[r, "\varphi(B)"] & G.F(B) \end{tikzcd}$$

أي أن :

$$G.F(u) \,.\, \varphi(A) = \varphi(B) \,.\, u \quad ①$$

وبما أن $\varphi(B)$ إيزومورفيزم، فإنه يوجد مورفيزم $\varphi^{-1}(B)$

أي أن : $\varphi^{-1}(B) \,.\, G.F(u) \,.\, \varphi(A) = u$

أيضاً لما كان φ مورفيزم دالي و v مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$ فإن المخطط الآتي تبديلي :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "v"'] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(v)"] \\ B \arrow[r, "\varphi(B)"] & G.F(B) \end{tikzcd}$$

أي أن : $G.F(v) \,.\, \varphi(A) = \varphi(B) \,.\, v$

$$\varphi^{-1}(B) \,.\, G.F(v) \,.\, \varphi(A) = v \quad ②$$

وبما أن $G.F(u) = G.F(v)$ ينتج من ① و ② أن $u = v$ ومنه $F_{A,B}$ متباين .

لنثبت أن التطبيق $F_{A,B}$ غامر :

لنأخذ عنصر من المستقر ، ليكن $\omega : F(A) \longrightarrow F(B)$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$. أي أن $\omega \in \mathcal{L}_2(F(A), F(B))$

عندئذٍ فإن : $G(\omega) : G.F(A) \longrightarrow G.F(B)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$

وطالما كان φ مورفيزم دالي فإن :

/نريد البحث عن مورفيزم

للفئة $\mathcal{L}_1(A,B)$ كما في

يعين ω صورته

/علماً أن $\varphi(B)$ إيزومورفيزم

يوجد مورفيزم $\varphi^{-1}(B)$ /

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dashed, "\omega^*"] \arrow[d, "\varphi(A)"'] & B \arrow[d, shift left, "\varphi(B)"] \\
G.F(A) \arrow[r, "G(\omega)"] & G.F(B) \arrow[u, shift left, "\varphi^{-1}(B)"]
\end{tikzcd}$$

لنضع :

$$\omega^* = \varphi^{-1}(B).G(\omega).\varphi(A)$$

فنجد أن : $\omega^* \in \mathcal{L}_1(A,B)$ /لنبرهن أن صورته هي ω / .

وأن : $F(\omega^*) = F(\varphi^{-1}(B).G(\omega).\varphi(A))$

وبما أن F دالي مباشر : $= F(\varphi^{-1}(B)).F.G(\omega).\underline{F.\varphi(A)}$

بالاستفادة من كون $\varphi : I_{\mathcal{L}_2} \longrightarrow F.G$ ايزومورفيزم دالي وبالتالي إن $\varphi(F(A))$ مورفيزم دالي ، أي أن المخطط الآتي تبديلي :

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\varphi(F(A))"] \arrow[d, "\omega"'] & F.G(F(A)) \arrow[d, "F.G(\omega)"] \\
F(B) \arrow[r, "\varphi(F(B))"] & F.G(F(B))
\end{tikzcd}$$

ومنه فإن : $F.G(\omega).\varphi(F(A)) = \varphi(F(B)).\omega \quad (*)$

بالاعتماد على هذا المخطط : وبما أن $F.\varphi = \varphi.F$

$F(\omega^*) = F(\varphi^{-1}(B)).F.G(\omega).\underline{\varphi.F(A)} = F(\varphi^{-1}(B)).\varphi(F(B)).\omega$

$= F(\varphi^{-1}(B)).F.\varphi(B).\omega$ / $F.\varphi = \varphi.F$ /

$= F(\varphi^{-1}(B).\varphi(B)).\omega$ / F دالي مباشر /

$= F(I_B).\omega = I_{F(B)}.\omega = \omega$ ومنه فإن $F_{A,B}$ غامر .

إثبات (2):

ليكن $M \in ob(\mathcal{L}_2)$ عندئذٍ $G(M) \in ob(\mathcal{L}_1)$ لنفرض أن $N = G(M)$

نجد أن $\psi(N) : N \longrightarrow G.F(N)$ إيزومورفيزم [illegible]

ومنه $I(N) = N$ [illegible]

$$N \cong G.F(N)$$

أيضاً:

$$\psi(M) : M \longrightarrow F.G(M) = F(G(M))$$

ومنه: $I_{\mathcal{L}}(M) = M$

$$M \cong F(N)$$

انتهت المحاضرة