

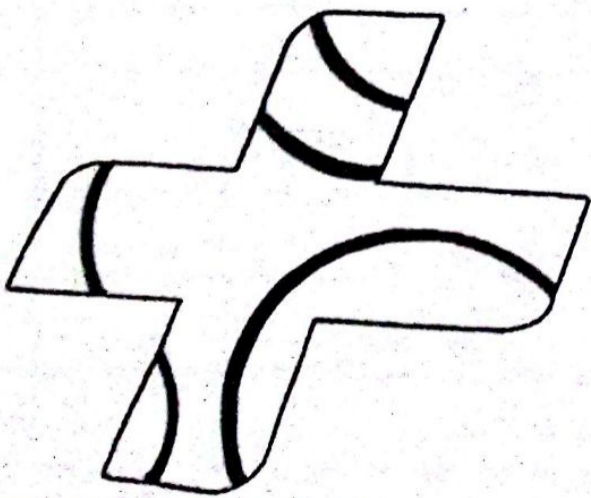
الرياضيات (التطبيقية)

تطبيقات نظرية الفئات

المحاضرة

10

السنة الرابعة و. حمزة الحاكمي الفصل الثاني



PLUS

LIBRARY



Plus Library

برامكة - حرم كلية العلوم

Mobil: 0944879460 / Phone: 011-2151436

القسم: الرياضيات التطبيقية، السنة: الخامسة، المحاضرة: المتجهات
 المادة: نظرية المجموعات، الدكتور: محمد... التاريخ: 2017 / 5 / 8

الأستاذ
 الأستاذة

تكملة الفئات

إن مفهوم تكافؤ الفئات هو تعميم لمفهوم التماثل في الفيزياء الحديثة.
 / قبل تعريف التكافؤ سنفاج تعريف صانء الكه مع مورفزم داله
 و صاء مورفزم داله مع داله وذلك من خلال التعريف الآتي /
 تعريف:

ليكن L_1, L_2, L_3 فئات واقرب من أن:

$$F: L_1 \rightarrow L_2, T: L_2 \rightarrow L_3 \text{ داله مباشرة}$$

$$\varphi: F \rightarrow G \text{ داله مورفزم}$$

$$T \circ \varphi: T \circ F \rightarrow T \circ G$$

معرف بالآتي

$$\forall A \in \text{ob}(L_1), T \circ \varphi(A) = T(\varphi(A))$$

البرهان:

لما أن F, G, T داله مباشرة، وتتركب دالتين مباشرتين هو
 داله مباشر يكون /

$$T \circ \varphi: T \circ F, T \circ G \text{ داله مباشرين}$$

وبناء أي داله مباشرين نطيع تعريف مورفزم داله /

$$T \circ \varphi: T \circ F \rightarrow T \circ G$$

$$\forall A \in \text{ob}(L_1) \text{ بالآتي:}$$

$$\varphi(A): F(A) \rightarrow G(A) \text{ مورفزم للفتة } L_2$$

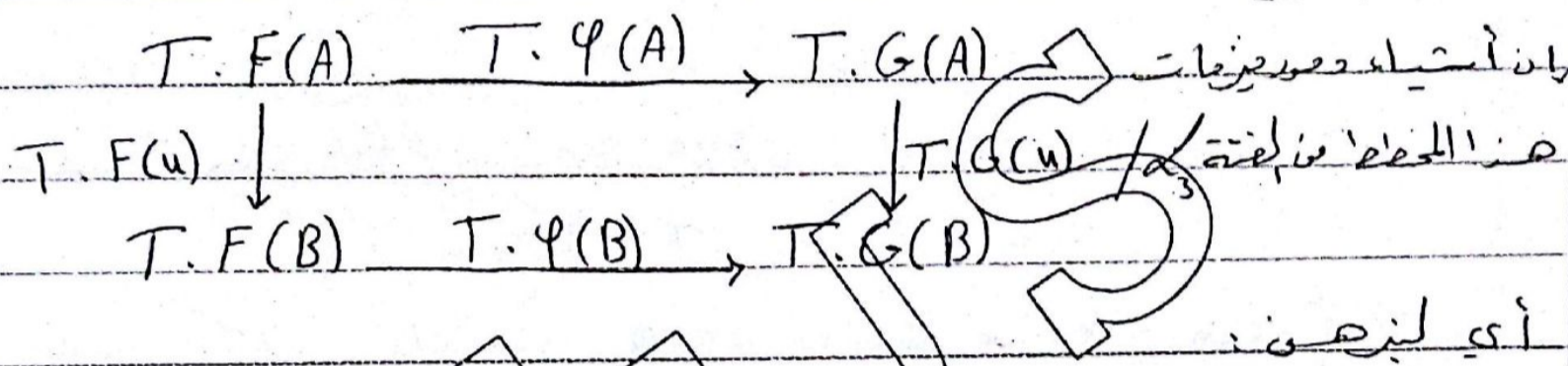
$$T(\varphi(A)): T(F(A)) \rightarrow T(G(A)) \text{ داله}$$

$$T \circ \varphi(A): T \circ F(A) \rightarrow T \circ G(A) \text{ مورفزم للفتة } L_3$$

وبالتالي الشرط الأول من شروط المورفزم الاله فقط، تكبره:

لأجل كل شيء من أشياء الفترة الأولى ، تكون صورته مورخيم للفترة الثانية
 أي بالنسبة للتعيينية: من إثبات أن: $T.G \rightarrow T.F \rightarrow T.\varphi$ مورخيم دالي
 إن $\varphi_3 \rightarrow \varphi_1$: $T.\varphi$ ثبت أنه $\forall A \in \text{ob}(\mathcal{A}_1)$ يكون: $T.\varphi(A)$
 مورخيم للفترة \mathcal{A}_3 /

لتحقق من الشرط الثاني / المحطة تبيلي /
 ليكن: $u: A \rightarrow B$ مورخيم للفترة \mathcal{A}_3 ، لنعرض أن المحطة
 الآتي تبيلي ،



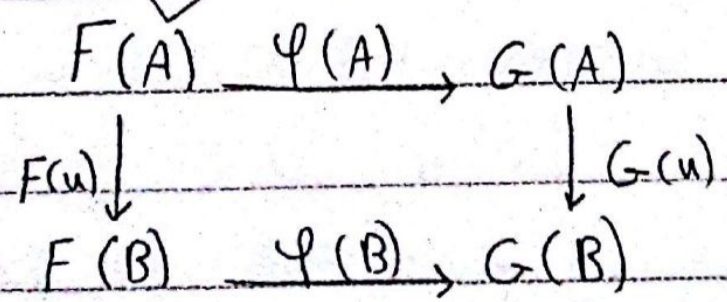
$$T.G(u) \cdot T.\varphi(A) = T.\varphi(B) \cdot T.F(u)$$

لأخذ الطرف الأيمن:

$$T.G(u) \cdot T.\varphi(A) = T(G(u)) \cdot T(\varphi(A)) = T(G(u) \cdot \varphi(A))$$

\uparrow دالي مباشر \uparrow مورخيم تبيلي $T.\varphi$

ولما كان φ مورخيم دالي وأن $u: A \rightarrow B$ مورخيم للفترة \mathcal{A}_3 فإن
 المحطة الآتي تبيلي :



أي أن: $G(u) \cdot \varphi(A) = \varphi(B) \cdot F(u)$ بالتعريف $*$ وبأن:

$$T.G(u) \cdot T.\varphi(A) = T(\varphi(B) \cdot F(u)) = T.\varphi(B) \cdot T.F(u)$$

\uparrow دالي مباشر

وهذا المحطة تبيلي ، أي أن $T.\varphi$ مورخيم دالي

أي

تمديد (2): لكن ψ, ψ_1, ψ_2 ، ولنفرض أن :
 $T: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ ، $F, G: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_3$
 عندئذٍ لأجل كل مورفيم ψ :

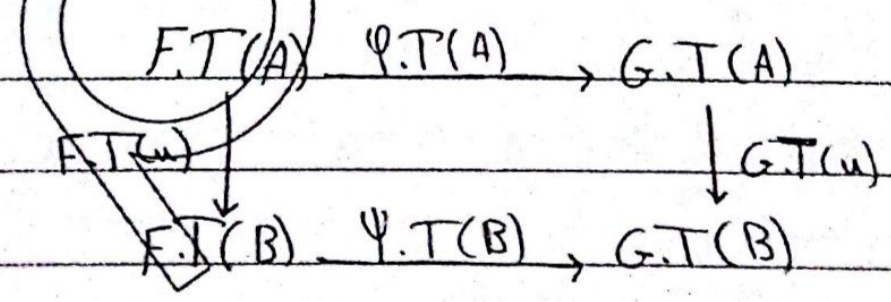
$$\psi: F \rightarrow G$$

$$\psi.T: F.T \rightarrow G.T$$

يوجد مورفيم ψ دالٍ :
 حرف بالشكل الآتي :

$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1)$, $\psi.T(A) = \psi(T(A))$
 البرهان : لدينا $F.T, G.T: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة.
 لخرف بالشكل الآتي :
 بالشكل الآتي : $A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1)$ فإن
 $T(A) \in \text{ob}(\mathcal{L}_2)$

ولما كان ψ مورفيم دالٍ فإن $\psi.T(A) = \psi(T(A))$ مورفيم للفتة \mathcal{L}_2
 أي أن الشرط الأدل من شروط المورفيم الدالٍ محقق
 الشرط الثاني : ليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيم للفتة \mathcal{L}_1 ولنفرض على أن المخطط
 الآتي تبين :



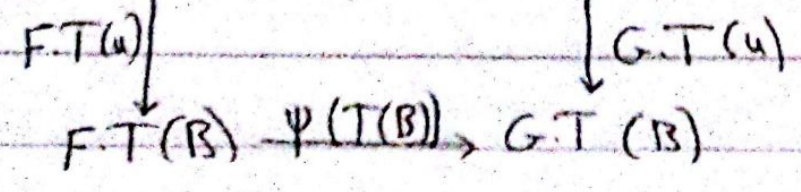
أي لنفرض أن : $G.T(u) \cdot \psi.T(A) = \psi.T(B) \cdot F.T(u)$

ولما كان $u: A \rightarrow B$ مورفيم للفتة \mathcal{L}_1

ظالم T دالٍ يثبت $T(u): T(A) \rightarrow T(B)$ مورفيم للفتة \mathcal{L}_2

ولما كان $\psi: F \rightarrow G$ مورفيم دالٍ

فإن المخطط الآتي تبين :



أي أن: $G.T(u) \cdot \psi(T(A)) = \psi(T(B)) \cdot F.T(u)$

وهو تعبير $\psi.T \leftarrow$

$$G.T(u) \cdot \psi.T(A) = \psi.T(B) \cdot F.T(u)$$

وهذا المعادلة تبين أن $\psi.T$ مورفيم دالي.

تعريف: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين داليتين $F: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ دالي مباشر
نقول أن F هو تكافؤ فئات إذا وجد دالي مباشر

$$G: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$$

دايزد مورفيزم دالي $G.F$ $\psi: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$ دالي مطابق على \mathcal{L}_1

$$\psi: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$$

$$\psi \circ F = F \circ \psi$$

برهنة: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين داليتين $F: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ دالي مباشر،

إذا كان الـ F تكافؤ فئات - عندئذ:

1- أيًا كان $A, B \in \text{ob}(\mathcal{L}_1)$ فإن الحقيقة:

$$F_{A,B}: \mathcal{L}_1(A, B) \rightarrow \mathcal{L}_2(F(A), F(B))$$

متباينة ومفاجئ.

2- لأجله كل $M \in \text{ob}(\mathcal{L}_2)$ يوجد $N \in \text{ob}(\mathcal{L}_1)$ حيث:

$$F(N) \cong M$$

إثبات (1):

لأن F تكافؤ فئات فإنه يوجد دالي مباشر:

$$G: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$$

دايزد مورفيزم دالي:

$$\psi: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$$

$$\psi: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$$

وحيث أن: $F \cdot \varphi = \varphi \cdot F$

1- لما كان F دالي فإن $F_{A,B}$ تطبيقة

لنثبت أن التطبيقة $F_{A,B}$ متباينة:

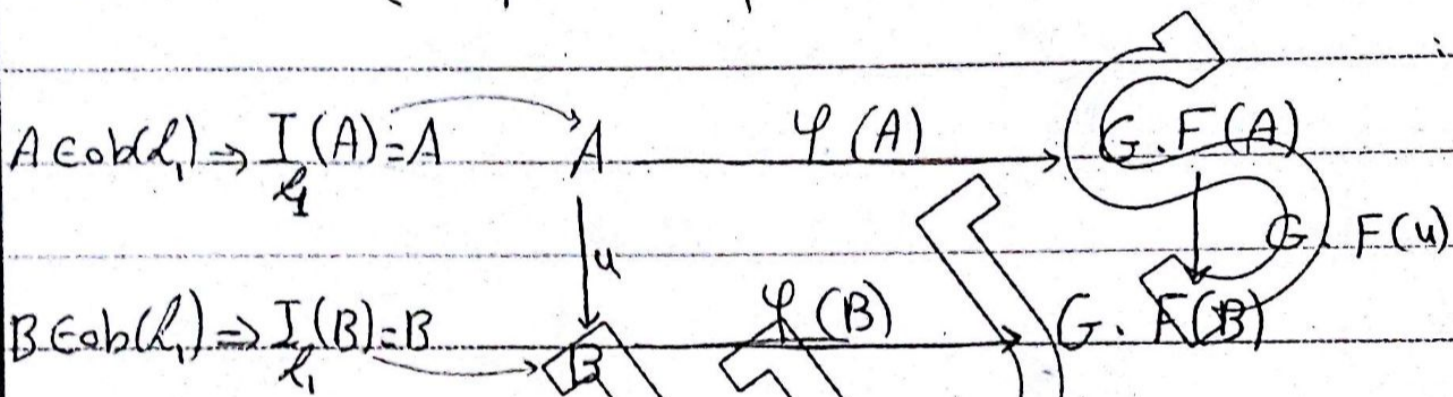
أياً كان $A, B \in \text{ob}(\mathcal{L}_1)$ ليكن $u: A \rightarrow B$ و $v: A \rightarrow B \in \mathcal{L}_1(A, B)$

حيث: $F(u) = F(v)$

ولما كان G دالي مباشر فإن: $G \cdot F(u) = G \cdot F(v)$

ولما كان φ مورفيزم دالي فإن صور φ للفترة \mathcal{L}_1 فإن المخطط الآتي

تبيانه:



أي أن:

$$G \cdot F(u) \cdot \varphi(A) = \varphi(B) \cdot u \quad (1)$$

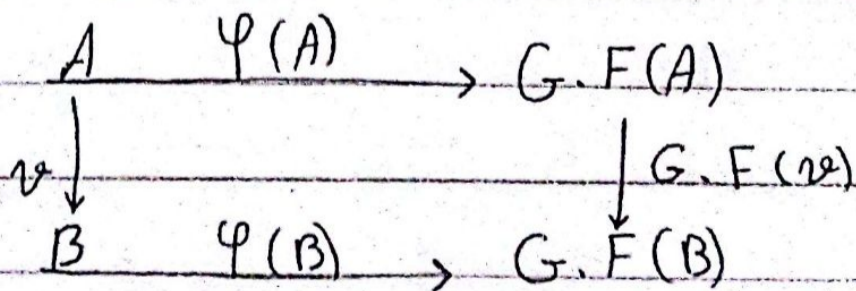
وبما أن $\varphi(B)$ إيز مورفيزم فإنه يوجد مورفيزم $\varphi^{-1}(B)$

$$\varphi^{-1}(B) \cdot G \cdot F(u) \cdot \varphi(A) = u$$

أي أن:

أيضاً لما كان φ مورفيزم دالي و v مورفيزم للفترة \mathcal{L}_1 فإن المخطط الآتي

تبيانه:



$$G \cdot F(v) \cdot \varphi(A) = \varphi(B) \cdot v$$

أي أن:

$$\varphi^{-1}(B) \cdot G \cdot F(v) \cdot \varphi(A) = v \quad (2)$$

وبما أن $G \cdot F(u) = G \cdot F(v)$ ينتج من (1) و (2) أن $u = v$ وذلك $F_{A,B}$ متباينة

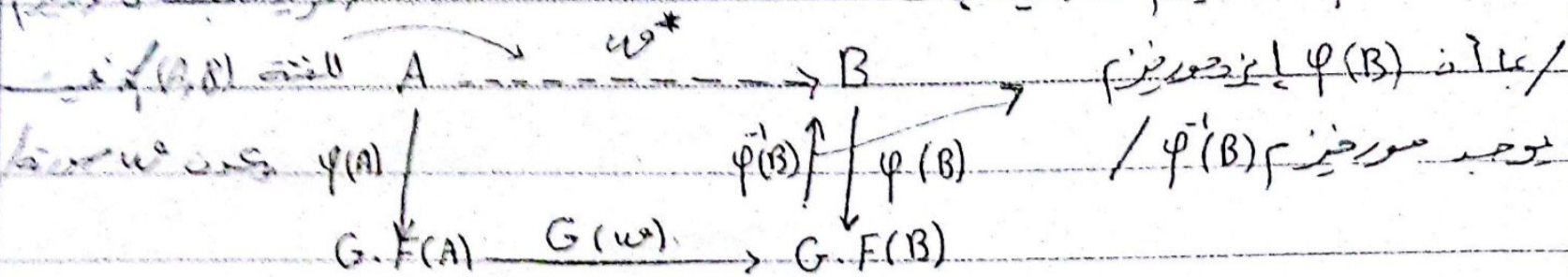
لتبين أن التطبيق $F_{A,B}$ غامر

لنأخذ عنصر من $F(B)$ ليكن $w \in F(B)$

سوف نبحث عن العنصر $w^* \in F(A)$ الذي يحقق $F(w^*) = w$

عندئذ فإن $G(w) \in F(A)$ حيث $G: F(B) \rightarrow F(A)$ هو دالة

دالة ψ من $F(B)$ إلى $F(A)$ حيث $\psi(w) = G(w)$



$$w^* = \psi^{-1}(G(w))$$

فإن $w^* \in F(A)$ ولذا $w^* \in F(A, B)$ حيث $w^* \in F(A)$

$$F(w^*) = F(\psi^{-1}(G(w)))$$

$$= F(\psi^{-1}(G(w))) \cdot F(G(w)) \cdot F(\psi(A))$$

بالاستفادة من كون F, G دالة ψ من $F(B)$ إلى $F(A)$ فإن

$\psi(F(A)) = F(G(F(A)))$ حيث ψ دالة F من $F(A)$ إلى $F(B)$

$$F(A) \xrightarrow{\psi} F(B) \xrightarrow{F} F(A)$$

$$F(A) \xrightarrow{\psi} F(B) \xrightarrow{F} F(A)$$

$$F(G(w)) \cdot \psi(F(A)) = \psi(F(B)) \cdot w \quad (*)$$

$$F \cdot \psi = \psi \cdot F \quad \text{حيث أن } F \text{ دالة } \psi$$

$$F(w^*) = F(\psi^{-1}(G(w))) \cdot F(G(w)) \cdot \psi(F(A)) = F(\psi^{-1}(G(w))) \cdot \psi(F(B)) \cdot w$$

$$= F(\psi^{-1}(G(w))) \cdot \psi(F(B)) \cdot w$$

$$= F(\psi^{-1}(G(w))) \cdot \psi(F(B)) \cdot w$$

$$= F(I_B) \cdot w = I_{F(B)} \cdot w = w$$

$N = G(M)$ is a normal subgroup of $G(M) \text{ sub}(L_1)$ since $M \text{ cob}(L_1)$ is a normal subgroup of $G(M)$.
 $\psi(N) : N \rightarrow G.F(N)$
 $\ker \psi = N$
 $N \cong G.F(N)$

$\psi(M) : M \rightarrow F.G(M) = F(G(M))$
 $\ker \psi = M$
 $M \cong F(N)$

