مسألة الخامسة:

عين منطقة تحليلية للتابع

$g(z) = Log(z^2+1) \to \mathbb{C} \setminus h^{-1}(o\bar{x})$

حيث $h(z) = z^2+1$

$g'(z) = \frac{2z}{z^2+1} \quad \forall\, \mathbb{C} \setminus (D_1 \cup D_2)$

بشكل عام: يجب أن يكون f تحليلي و L_α تحليلي حتى يكون التركيب تحليلي

L_α تحليلي على $\mathbb{C}^* \setminus DL_\alpha$; $f(z) = L_\alpha(h(z))$

$G \setminus h^{-1}(DL_\alpha \cup \{0\})$ حيث G مجموعة تحليلية

h وأما المشتق $f'(z) = \frac{h'(z)}{h(z)}$

$\forall z \in G \setminus h^{-1}(DL_\alpha \cup \{0\})$

تمرين: هل يوجد تابع أصلي لـ $\frac{2z}{z^2+1}$ F

① على منطقة تحوي $D(i,1)$

② على شريط $\{1 > Im\, z > -1\}$

تعريف: نقول أن التابع الأصلي لـ f على مجموعة مفتوحة $G \subseteq \mathbb{C}$ إذا كان $F'(z) = f(z) \ \forall z \in G$

في التكاملات الحقيقية لكسر أول شي نفكر فيه هل البسط مشتق المقام؟ (عندئذٍ لابد أن يكون فرع من فروع التابع اللوغاريتمي)

سؤال مكافئ (هام)

هل يوجد فرع للتابع $Log(z^2+1)$ ويكون تحليلي على تلك المنطقة التي تحوي $D(i,1)$

أي على الشريط $\{-1 < Im\, z < 1\}$

الحل: إن نقاط التفرع لـ $Log\, z^2+1$ هي $z_1 = i$ و $z_2 = -i$

إن المنطقة التي تحوي $D(i,2)$ يمكن الانطلاق من أي نقطة $D(i,1)$ وإجراء دورة كاملة حول i (وهي نقطة تفرع) دون الخروج من $D(i,2)$ وضمنه $D(i,1)$ لا تحقق الخاصة وبالتالي ~~...~~ لا يوجد فرع تحليلي لـ $Log(z^2+1)$ على أي منطقة تحوي $D(i,1)$

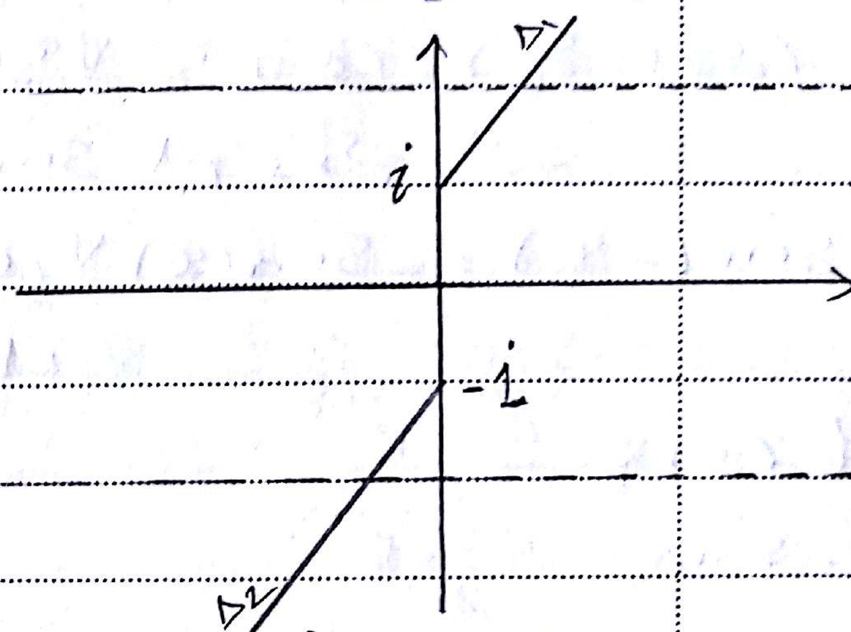
بالنتيجة ليس لـ $\frac{2z}{z^2+1}$ أي تابع أصلي على منطقة تحوي $D(i,2)$

* هل يوجد لـ $Log\, z^2$ فرع تحليلي على الشريط $\{-1 < Im\, z < 1\}$ ؟

نعم لأنه يحقق الخاصة أي نقاط التفرع ليست من داخله بالشريط

نتيجة: إن الشريط $\{-1 < Im\, z < +1\}$ يحقق الخاصة أي لا يمكن الانطلاق من أي نقطة منه والعودة إليه بإجراء دورة كاملة حول أحد نقاط التفرع z اما $z_1 = i$ أو $z_2 = -i$ دون الخروج من الشريط أو أي منطقة تحويه أي يوجد فرع للتابع $Log\, z^2+1$ تحليلي

ملاحظة: لا يمكن توسيع الشريط
ويكون التابع log تحليلي عنده إلا في
حالة واحدة وهي اقتطاع مستقيمين جنباً
الدوران حول i و $-i$



توسيع الشريط بهذا الشكل

تمرين: اثبت أن التابعين L_α و $h_\alpha = e^z|_{S_\alpha}$
متعاكسان (كل منهما تابع عكسي للآخر)

الحل: الشرط الأول متحقق الأول يساوي
مستقر الثاني والعكس
أسي دوري بالتالي هو ليس متباين
ولكن المقصور على S_α هو متباين و
مستقره الفعلي هو h_α $\mathbb{C}^*\setminus D$ وهو مستقر
عام ومتباين فله تابع عكسي وهو L_α

التوابع المثلثية العقدية:
وهو تابع وحيد القيمة
يمثل بمتسلسلة قوى عقدية
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \Big\} U_n$$

ومتقاربة بالإطلاق على $\mathbb{C}$ أي أن
نصف قطر التقارب هو ∞ (إذ $\mathbb{R}$)
لنطبق دالمبير على هذه المتسلسلة

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)} \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot (-1)^n z^{2n}}\right|$$

$$= \left|\frac{(-1)\, z^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \frac{|z^2|}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومنه نصف قطر تقارب هو $\forall z \in \mathbb{C}$
اللانهاية والمتسلسلة المتقاربة بالإطلاق
حسب دالمبير أياً كانت z من $\mathbb{C}$

تذكر: أن التابع الممثل بمتسلسلة قوى
~~مستمر~~ تحليلي على قرص تقاربه

تابع التجيب العقدي:
نرمز له بـ cos وهو معرف على $\mathbb{C}$
(حيث $\mathbb{C}$ هو قرص التقارب) ويأخذ
قيمه في $\mathbb{C}$ $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$$z \longrightarrow \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
حسب البرهنة cos تحليلي على $\mathbb{C}$
أي قابل للاشتقاق ومشتقه
$$(\cos z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n z^{2n-1}}{(2n)!}$$
مشان أخفاء أول حد
نبدل كل n بـ $n+1$ مشان نبلش
من الصفر

إن $\sin z$ و $\cos z$ تحليليان على $\mathbb{C}$

$(\cos z)' = -\sin z$

$(\sin z)' = \cos z$

$\cos z$ تابع زوجي لأن

$\cos(-z) = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\sin z$ تابع فردي لأن

$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ملاحظة

① $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

② $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(iz)^n}{n!} = 1 + iz - \dfrac{z^2}{2!} - i\dfrac{z^3}{3!} + \dots$

سنقوم بتجميع الحدود الزوجية مع بعض والفردية مع بعض وذلك ممكن لأن السلسلة متقاربة بالإطلاق من أجل $\forall z \in \mathbb{C}$

$e^{iz} = \left(1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dots\right)$

$\Rightarrow e^{iz} = \cos z + i\sin z$ *

$e^{-iz} = \cos z - i\sin z$ **

بجمع * و ** والتقسيم على 2 نحصل على ①

بطرح * من ** وتقسيم على $2i$ نحصل على ②

ملاحظة: إن $\cos z$ و $\sin z$ دوريان الدور الرئيسي لكل منهما هو 2π

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^{2n+2-1}}{(2n+2-1)!}$

$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sin z$

تمرين: أثبت أن السلسلة الموجبة متقاربة على $\mathbb{C}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

وهو تابع الجيب العقدي

ملاحظة: إن $\cos z$ هو المدد التحليلي لـ $\cos x$ الحقيقي إلى المستوي العقدي

وإن $\sin z$ هو المدد التحليلي لـ $\sin x$ الحقيقي إلى المستوي العقدي

انتهت المحاضرة الثامنة.

المحاضرة التاسعة:

التوابع المثلثية العقدية:

$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{2n!}$

$= 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dots$

$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$= z - \dfrac{z^3}{3!} + \dots$

$\sin x \, ch\, y + i \cos x \, sh\, y$

$\Rightarrow u = Re(\sin z) = \sin x \, ch\, y$

$v = Im(\sin z) = \cos x \, sh\, y$

تمرين: اثبت أن $\sin z$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}$ وعين مشتقه باستخدام معادلتي كوشي ريمن

الحل: $\left.\begin{array}{l} u_x = \cos x \, ch\, y ; \; u_x = v_y \\ v_y = \cos x \, ch\, y \end{array}\right\} \forall x, y \in \mathbb{R}$

الشرط الأول محقق ومنه u, v تابعان قابلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$

ملاحظة: $(ch\, x)' = sh\, x$

$(sh\, x)' = ch\, x$

نلاحظ عدم تغير الأشارات .

تمرين 2: عين الجزئين الحقيقي والتخيلي لـ $\cos z$ ثم اثبت أن $\cos z$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}$ وعين مشتقه باستخدام كوشي ريمن .

الحل: $\cos z = \cos(x+iy)$

$= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$

$= \cos x \dfrac{e^{iiy} + e^{-iiy}}{2} - \sin x \dfrac{e^{iiy} - e^{-iiy}}{2i}$

$\sin(z+2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i}$

$= \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$

خلاصة: يمكن اثبات معظم المطابقات المثلثية الحقيقية في $\mathbb{C}$

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

الاثبات سهل ومطلوب ..

$\cos(z_1 \mp z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2$

$\sin(z_1 \mp z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \mp \cos z_1 \sin z_2$

$\sin 2z = 2 \cos z \sin z$

$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

$= 2\cos^2 - 1$

$= 1 - 2\sin^2 z$

* الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لـ $\sin z$ و $\cos z$

$\sin(z) = \sin(x+iy)$

$= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$

$= \sin x \dfrac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} + \cos x \dfrac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i}$

$= \sin x \dfrac{e^{-y} + e^{+y}}{2} + \cos x \dfrac{e^{-y} - e^{+y}}{2i}$

$= \sin x \dfrac{e^{-y} + e^{+y}}{2} + \cos x \, i^2 \left(\dfrac{e^{+y} - e^{-y}}{2i}\right)$

$= \sin x \dfrac{(e^{-y} + e^{+y})}{2} + i \cos \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}$

Subject: Date :   /   /

$\cos z = a \Rightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = a$

$\Rightarrow (e^{iz})^2 - 2a e^{iz} + 1 = 0$

لنفرض أن $e^{iz} = \omega$

$\omega^2 - 2a\omega + 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 4a^2 - 4$

δ جذر لـ Δ

$\omega_1 = \frac{2a+\delta}{2}$, $\omega_2 = \frac{2a-\delta}{2}$

حل المعادلتين $e^{iz} = \omega_1$, $e^{iz} = \omega_2$

تمرين: حل المعادلة الآتية

$\sin z = 0$

الحل:

$\Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$

$\Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0$

$\cancel{(e^{iz})^2 - 1 = 0}$

$\Rightarrow e^{iz} = e^{-iz}$

نلاحظ أن التابع الأسي دوري

$\Rightarrow iz = -iz + 2\pi k i$

$\Rightarrow z = -z + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = \pi k$

إن أصفار $\sin z$ العقدي هي أصفار $\sin x$ الحقيقي

$\cos x \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - \sin x \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}$

$\cos x \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - \sin x \frac{i^2(e^{y}-e^{-y})}{2i}$

$\cos x \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - i\sin x \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$

$\cos x \, ch y - i \sin x \, sh y$

$\Rightarrow u = Re(\cos z) = \cos x \, ch y$

$v = Im(\cos z) = -\sin x \, sh y$

$u_x = -\sin x \, ch y$; $u_x = v_y$

$v_y = -\sin x \, ch y$; $\forall x, y \in \mathbb{R}$

ومنه قابلية الاشتقاق لـ $\cos z$ ① محققة

ومنه شرط كوشي ريمان محقق

$f' = u_x + i v_x$

$\Rightarrow v_x = -\cos x \, sh y$

$\Rightarrow (\cos z)' = -\sin x \, ch y - i \cos x \, sh y$

$= -(\sin x \, ch y + i \cos x \, sh y)$

$= -\sin z$

حل معادلة مثلثية:

$\sin z = a$

أو $\cos z = a$

حيث a ثابت عقدي

Scanned by CamScanner

تمرين: حل المعادلة $\cos z = 0$

الحل: أصفار $\cos z$ هي أصفار $\cos x$

$z = \frac{\pi}{2} + \pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

تمرين: عين مجموعة تحليلية التابع

عين النقاط الشاذة للتابع

$f(z) = \frac{1}{\cos z - i}$

الحل: حاصل قسمة تابعين بسط ثابتة

والمقام تحليلية على $\mathbb{C}$ ومنه الكسر

تحليلي على $\mathbb{C}$ فوق أصفار المقام

$\mathbb{C} \setminus \{\cos z - i = 0\}$

$\cos z - i = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - i = 0$

$(e^{iz})^2 - 2i e^{iz} + 1 = 0$

لنفرض أن $w = e^{iz}$

$\Rightarrow w^2 - 2iw + 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta = -4 - 4 \times 1 \times 1 = -8$

ومنه جذر Δ : $\delta = i2\sqrt{2}$

$w_1 = \frac{2i + 2\sqrt{2}i}{2} = (1+\sqrt{2})i$

$w_2 = \frac{2i - 2\sqrt{2}i}{2} = (1-\sqrt{2})i$

$\Rightarrow e^{iz} = (1+\sqrt{2})i$

$\Rightarrow e^{i(x+iy)} = (1+\sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow e^{-y+ix} = (1+\sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow e^{-y} e^{ix} = (1+\sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow e^{-y} = (1+\sqrt{2})$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$z_k = (\frac{\pi}{2} + 2\pi k) - i\ln(1+\sqrt{2})$

2) $e^{iz} = e^{-y} e^{ix} = (\sqrt{2} - 1) e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$w_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln(\underbrace{\sqrt{2} - 1})$

نتأكد أنه موجب

وبالتالي مجموعة تحليلية التابع هي

$\mathbb{C} \setminus \{z_k, w_k \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$

سؤال: هل النقطة (كذا) من مجموعة تحليلية التابع (كذا)؟

لا نتعب أنفسنا بإيجاد مجموعة تحليلية التابع لنرى إذا كانت النقطة تنتمي للمجموعة أو لا تنتمي وإنما نعوضها في المقام إذا انعدم تكون النقطة شاذة وإن لم ينعدم تكون من مجموعة تحليلية التابع

مثال: ما مجموعة تحليلية التابع

$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$

$\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$

$(tg\, z)' = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 z} \\ 1 + tg^2 z \end{cases}$

ما الفرق بين المتطابقة والمعادلة ؟

إن المتطابقة صحيحة من أجل كل قيم $\mathbb{R}$

أما المعادلة محققة من أجل عدد منتهٍ من $\mathbb{R}$

$$(\cot g\, z)' = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sin^2 z} \\ -(1+\cot g\, z) \end{cases}$$

$$tg\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} = \frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}$$

تمرين: عين صورة القطعة المستقيمة

$\{ z = x + iy_0 \; ; -\pi < x < \pi \}$

وفق $\sin z$

الحل:

$\sin z = \sin x \, ch\, y + i \cos x \, sh\, y$

لتكن $z = x+iy$ نقطة من قطعة مستقيمة

$\sin z = \sin x \, ch\, y_0 + i \cos x \, sh\, y_0$

$u = \sin x \, ch\, y_0$

$v = \cos x \, sh\, y_0$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{ch^2 y_0} + \frac{v^2}{sh^2 y_0} = 1 \quad ; y_0 \neq 0$$

ولنا الحق في التقسيم على $ch\, y_0$ لأنه لا تنعدم ولكن $sh\, y_0$ تنعدم عند $y_0=0$ لذلك قمنا باستثناء $y_0=0$

وهي معادلة قطع ناقص

الداخل لأي نقطة من القطع المستقيمة هو القطع الناقص السابق

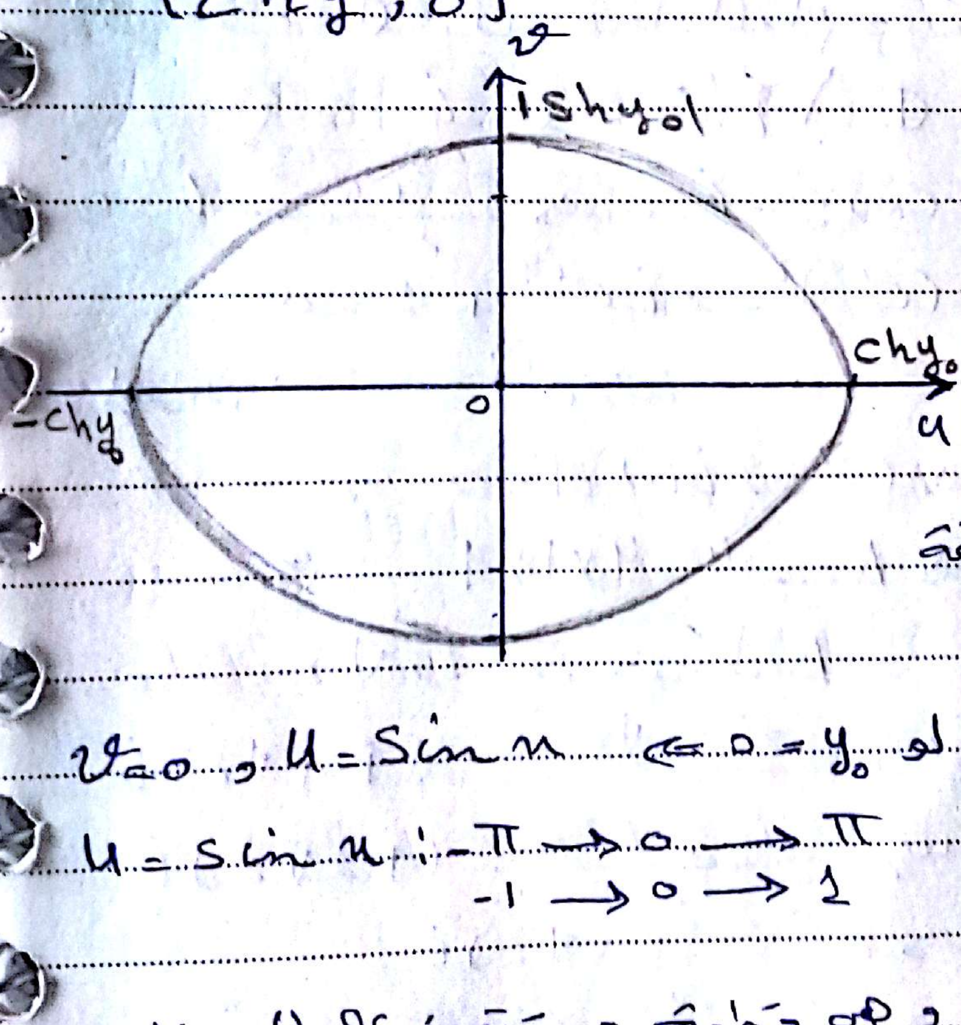
نصف قطره الكبير يساوي $ch\, y$

لأن $ch\, y > sh\, y$

- هل صورة القطعة هي كامل القطع أو هي بعض نقاط منه ؟

عندما تتغير x من $-\pi < x < \pi$

نرسم القطع كله باستثناء $(ch\, y, 0)$



لو $y_0 = 0$ فإن $u = \sin x$ و $v = 0$

$u = \sin x : -\pi \to 0 \to \pi$

$-1 \to 0 \to 1$

وهي قطعة مستقيمة على المحور u دون طرفيه

انتهت المحاضرة التاسعة